А.Е. Малхасян, Л.В. Федосеева

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ В ЭКОНОМИКЕ

Ростов-на-Дону
2018

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А.Е. Малхасян, Л.В. Федосеева

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ В ЭКОНОМИКЕ

Учебное пособие

Ростов-на-Дону
ДГТУ
2018

УДК 330.45
М18

Рецензенты:
доктор экономических наук, профессор *К.А. Бармута*
доктор экономических наук, профессор *С.Н. Цветкова*

Малхасян, Анастасия Еноковна.
М18 Исследование операций в экономике: учеб. пособие / А.Е. Малхасян, Л.В. Федосеева ; Донской гос. техн. ун-т. – Ростов-на-Дону: ДГТУ, 2018. – 217 с.

ISBN 978-5-7890-1469-1

Представлены модели линейного программирования, классические методы оптимизации, модели управления запасами, сетевого планирования и управления, элементы теории массового обслуживания. Рассмотрен алгоритм применения надстройки Solver в офисной программе Microsoft Office приложения Excel, для решения задач математического программирования. Приведены примеры экономических задач с решениями и для самостоятельной работы.

Предназначено для студентов экономических специальностей и лиц, занимающихся самообразованием.

УДК 330.45

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Донского государственного технического университета

Научный редактор
кандидат экономических наук, доцент Т.В. Гапоненко

ISBN 978-5-7890-1469-1

Оглавление

Предисловие

Методы исследования операций в экономике, возможности применения которых существенно расширились благодаря современному программному обеспечению ПЭВМ, представляют собой один из наиболее динамично развивающихся разделов прикладной экономической науки. Современный экономист должен хорошо разбираться в экономико-математических моделях оптимизации, уметь моделировать реальные экономические ситуации и принимать рациональные решения.

В учебном пособии излагаются методы экономико-математического моделирования, которые широко используются в различных областях экономики, при принятии управленческих решений в финансовой сфере в силу разработанности математического аппарата и возможности практической реализации.

Пособие состоит из шести глав, которые разделены на параграфы.

Первая глава посвящена методологическим основам дисциплины «Исследование операций в экономике». В ней изложены эволюция проблемы принятия решений, основные понятия исследования операций, история развития исследования операций как научной дисциплины, приведены примеры прямых и обратных задач исследования операций.

Во второй главе рассмотрены основные методы решения линейных задач исследования операций: графический метод, симплексный метод, а также использование возможностей приложения Excel. Значительное место отведено алгоритму формирования экономико-математических моделей, анализу на чувствительность оптимального плана к изменению запаса ресурсов, а также экономической интерпретации полученных результатов.

В третьей главе рассмотрены особенности решения и анализа специальных задач исследования операций в экономике. Подробно изложены двойственная задача, транспортная и задача о назначениях.

Четвертая глава посвящена моделям динамического программирования. В ней приведены задачи и методы динамического программирования. Построение сетевых графиков динамических задач экономически обосновывается необходимостью календарного планирования на предприятии.

В пятой главе значительное место отведено использованию аппарата теории массового обслуживания для решения финансово-экономических задач.

В шестой главе рассматриваются элементы теории игр.

Наряду со сведениями теоретического характера, в пособии разбирается большое количество примеров и задач, цель которых – уяснение основных понятий и методов исследования операций. В конце каждой главы приведены задачи для самостоятельного решения. Они подобраны и составлены с особой тщательностью и могут служить для проверки степени усвоения читателем изученного материала. Примеры и задачи предусматривают небольшой объем вычислений и могут быть использованы на практических занятиях при изучении дисциплины «Исследование операций в экономике».

Дополнительные теоретические сведения для более глубокого изучения того или иного раздела можно получить из приведенной в конце пособия рекомендуемой литературы. Изучение всех разделов исследования операций в экономике, излагаемых авторами в учебном пособии, предусмотрено Государственным образовательным стандартом по экономическим специальностям.

Пособие написано на основе опыта преподавания исследования операций в экономике в высших учебных заведениях, а также на основе решения ряда практических задач, которые встречались авторам в научно-исследовательской работе.

Глава 1. ПРЕДМЕТ И ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ В ЭКОНОМИКЕ

1.1. Проблема принятия решения и ее эволюция

Процесс принятия решения не нов – им интересовались еще жрецы и мудрецы глубокой древности, светила античных времен, его изучают и современные ученые. За всю историю своего существования люди пользовались различными способами принятия решения. Поэтому неудивительно, что с древних времен до настоящего времени проблемы решения входят в число актуальных проблем науки. При этом наибольшее внимание обращается на решение нестандартных задач, которые носят творческий характер. Информационные источники, дошедшие до нас с древнейших времен, свидетельствуют, что уже тогда людей волновал вопрос, каким образом происходит принятие решения, особенно творческого, каков рациональный путь к выбору правильного поступка при новых, ранее не встречавшихся обстоятельствах, каким образом люди создают новое и полезное. Например, известно пособие по принятию решения, которое написал около четырех тысяч лет назад в Китае И. Чинг. Это пособие явилось оригинальным руководством в творческой работе. По мнению некоторых зарубежных специалистов (Ф.Д. Баррет и др.), известный трактат не потерял своего значения до наших дней и может быть рекомендован современным хозяйственным руководителям и политическим деятелям (речь идет об управлении производством).

Несомненно, в те далекие времена научные данные о природе творческой деятельности, творческих решений были настолько скудны, что они не могли дать людям правильного объяснения этих процессов. Не находя правильного ответа на вопросы, люди объясняли их мистически. Так, древние греки и другие народы античного мира объясняли как силы природы, так и творческие способности их божественным происхождением. При таком объяснении основным орудием управления процессом принятия решения в неопределенных обстоятельствах или процессами творчества были молитвы музам – богиням творчества. Однако и в те далекие времена люди искали более рациональные пути улучшения процесса принятия решения, особенно для таких случаев, когда было неизвестно, как изменятся обстоятельства. В ту пору предсказаниями будущего славился греческий город Дельфы со своим оракулом. Вкратце суть этих предсказаний такова. Сначала с обстоятельствами дела досконально знакомились дельфийские жрецы. Затем они наблюдали за прорицательницей (Пифией), одурманенной выходящими из земли газами. Пифия выкрикивала отдельные слова и бессвязные фразы, вызывавшие у жрецов ассоциации, на основе которых они предсказывали будущее. Предсказание передавалось заинтересованному лицу или обнародовалось только после тщательного его обсуждения на совете. Несмотря на многовековую историю изучения процесса решения и его принятия, термин «принятие решения» появился в научной литературе в 30-е годы XX-го столетия – в творческих работах по управлению частным производством для характеристики процессов децентрализации управления.

Современный этап развития науки управления характеризуется интенсивным поиском новых идей, подходов, методов и средств, способных повысить эффективность управления сложными социально-экономическими системами в условиях все возрастающего динамизма процессов, усложнения связей в системах и все более жесткого ограничения ресурсов.

Одним из перспективных подходов является рассмотрение проблем управления с позиций принятия решений. Этот подход, связанный с использованием таких категорий, как «решение», «процесс принятия решений», «система принятия решений», в литературе называют концепцией принятия решений, теорией принятия решений, школой принятия решений. Актуальность и практическая ценность выделения и изучения проблем принятия решений в процессе управления определяются следующими причинами.

Во-первых, принятие решений занимает центральное место в процессе управления. Как известно, принятие решений наряду с прогнозированием, планированием, оценкой обстановки, исполнением решений, контролем и учетом является функцией управления. Центральная, важнейшая роль принятия решений определяется тем, что все другие функции управления направлены на формирование или реализацию решений. Кроме того, любую функцию управления технологически можно представить в виде последовательности решений. Например, при прогнозировании и планировании принимаются решения, связанные с выбором методов и средств, организацией работ, оценкой достоверности информации, выбором наиболее достоверного варианта прогноза и наилучшего варианта плана. Аналогичную цепочку решений можно построить и при рассмотрении других функций управления. Таким образом, функция принятия решений является с методологической и технологической точек зрения более общей, чем другие функции управления, поэтому в литературе иногда управление рассматривается как процесс принятия решений.

Во-вторых, принятие решений – это личная функция руководителя. Для руководителя любого ранга принятие решений является основной задачей, которую он обязан решать в процессе управления. Поэтому знание методов, технологии и средств решения этой задачи является необходимым элементом квалификации руководителя.

В-третьих, современной моделью функционирования организационных систем является система принятия решений. Эта модель согласует положительные стороны двух предшествующих теоретических моделей, имеющих структурно описательный характер: механической модели организации как «полностью рациональной» системы; естественной модели организации как «живой» социальной системы. Система принятия решений является третьей моделью организационных систем, в которой как первичный элемент рассматривается «решение». Основное развитие эта модель получила на рубеже 60-х годов прошедшего века. В данной модели рассматриваются рациональные принципы механической модели с учетом социальной и психологической специфики естественной модели. В решении объединяются объективные факторы информационного анализа проблем, проводимого на основе логического мышления, математических методов и

ЭВМ, и субъективные психологические факторы лица, принимающего решение. Поэтому система принятия решений позволяет осуществить системный подход к исследованию сложных организационных систем, включающий социально-технологическую форму реализации процессов управления.

В-четвертых, подход, ориентированный на принятие решений, создает прочную базу для дальнейшего совершенствования автоматизированных систем информационного обеспечения и управления. Эти системы должны развиваться от автоматизации трудоемких рутинных учетно-расчетных задач до логико-аналитических задач формирования и обоснования вариантов решений. Рассмотрение организационной системы принятия решений, выделение в ней центров принятия решений, формирование информационных потоков, соответствующей структуры и их динамической перестройки в зависимости от решаемых проблем являются перспективным направлением совершенствования управления сложными социально-экономическими системами. Изложенное показывает, что изучение проблем управления с единой методологической позиции принятия решений позволяет практически осуществить комплексный, системный подход к анализу функционирования организационных систем, технологии их управления, применению современных методов и технических средств.

В настоящее время существует достаточно большое число современных научных дисциплин, посвященных проблеме принятия решений. К таким дисциплинам можно отнести и исследование операций. Ситуацию, в которой происходит принятие решений, в общем случае характеризуют следующие основные черты.

1. Наличие цели (целей). Необходимость принятия решения диктуется наличием некоторой цели, которую нужно достичь, например выполнить плановое задание, выбрать тип прибора, назначить план перевозок и т. д. Если же цель не поставлена, то не возникает и необходимость принимать какое-либо решение.

2. Наличие альтернативных линий поведения. Решения принимаются в условиях, когда существует более одного способа достижения цели, или иначе, несколько альтернатив достижения цели. С раз-

личными альтернативами могут быть связаны различные затраты и разные вероятности достижения цели. Эти затраты и вероятности не всегда могут быть определены. Поэтому часто принятие решений сопряжено с неясностью и неопределенностью. Если же существует лишь одна линия поведения, то выбора нет и, следовательно, решение принимать не требуется: оно очевидно.

3. Наличие ограничивающих факторов. Решения обычно принимаются в условиях действия большого числа факторов, ограничивающих возможность выбора способов действий. Эти факторы называют дисциплинирующими условиями.

Факторы, подлежащие учёту, можно условно разделить на три основные группы: экономические, технические и специальные.

Под экономическими факторами понимают факторы, связанные с ресурсами: время, денежные средства, трудовые ресурсы, производственные возможности и т. п. К техническим факторам обычно относят факторы, которые непосредственно связаны с инженерным анализом и выработкой требований к техническим характеристикам объектов: габаритам, массе, прочности, надежности и т. п. Наконец, социальные факторы, в том числе и чисто человеческие, выражают требования не только политической или социальной целесообразности осуществления той или иной альтернативы, но и этики. Все перечисленные факторы накладывают ограничения на возможности достижения поставленной цели.

Очевидно, что отсутствие ограничений существенно упрощает задачу принятия решения. Таким образом, задача принятия решения (ЗПР) возникает в том и только в том случае, когда существует цель, которую нужно достичь, когда возможны различные способы ее достижения и существуют факторы, ограничивающие возможности достижения цели. Выяснение всех трех указанных элементов задачи принятия решений должно обязательно предшествовать её непосредственному решению.

Во всех случаях задача принятия решений направлена на определение наилучшего (оптимального) или приемлемого способа действий для достижения одной или нескольких целей. Под целью понимается в широком смысле идеальное представление желаемого состояния или результата деятельности. Если фактическое состояние не соответствует желаемому состоянию, то имеет место проблемная ситуация или проблема, выработка плана устранения которой и составляет сущность задачи принятия решений. Конечным результатом ЗПР является решение. Решение можно рассматривать как предписание к действию. С точки зрения содержания решением может быть стратегия управления экономической системой, способ действия, план работы, вариант инновационного проекта.

1.2. Основные понятия исследования операций

Одним из основных понятий теории принятия решений является операция. Под термином «операция» следует понимать организованную деятельность в любой области жизни, объединенную единым замыслом, направленную на достижение определенной цели, имеющую характер повторяемости.

В дальнейшем операцией будем называть управляемое мероприятие, систему действий, объединённых единым замыслом, и направленное на достижение какой-либо конкретной цели.

В данных формулировках подчеркиваются две особенности операции: **её целевая направленность и повторяемость**. Именно отсюда возникает возможность проводить исследования, касающиеся количественных сторон операции, общими научными путями с использованием методов теории вероятностей, статистики и данных различных наук – физики, биологии, техники, экономического анализа и др.

Укажем примеры операций:

а) производственная деятельность отрасли, выпускающей некоторую народнохозяйственную продукцию;

б) формирование портфеля заказов фирмы;

в) разработка плана транспортных перевозок материальных средств;

г) совокупность мероприятий, направленных на реализацию бизнес-плана и т. д. Изучение операций может проводиться как путем исследования оригинала самой операции, так и путем исследования модели операции. Основным методом исследования операций, особенно крупного масштаба, является метод моделирования. Получить *аналитическое описание* операции удаётся только в самых простых случаях. *Постановка специальных экспериментов* на реальных экономических системах с целью выбора оптимальных решений обычно сложна, связана с большими расходами и непредсказуемыми последствиями или просто нереальна. На практике значительно проще и рациональнее изучить закономерности и построить приближённую математическую модель экономического процесса и на основе изучения модели выбрать лучшее решение, отвечающее множеству нередко противоречивых требований и условий. Таким образом, основной метод изучения операций крупного масштаба – исследование моделей операции, главным образом, моделей математических.

Второе важное понятие исследования операций – оперирующая сторона. Совокупность лиц, которые стремятся в данной операции к достижению некоторой цели, а также технических устройств, с помощью которых цель достигается, называется оперирующей стороной. В операции могут участвовать одна или несколько оперирующих сторон, преследующих различные, несовпадающие цели. Несовпадение целей оперирующих сторон создаёт конфликтную ситуацию. Подобные операции называются многосторонними или конфликтными. Так, например, в торговле исход операции зависит от деятельности двух сторон, преследующих противоположные цели: фирмы, стремящейся продать товар с прибылью, организации, приобретающей товар заданного качества по минимальной цене.

Наряду с оперирующими сторонами в операции могут участвовать арбитры и природные силы, поведение которых в явном виде не подчинено стремлению к достижению цели операции. Для достижения цели оперирующая сторона должна располагать некоторым запасом активных средств (ресурсов), используя или расходуя которые, она может добиваться достижения цели. В качестве ресурсов в зависимости от сущности операции могут выступать: запасы сырья, рабочая сила, денежные средства, информационные и интеллектуальные ресурсы, торговые площади и т. п.

Операция является управляемым мероприятием. Оперирующая сторона управляет операцией, выбирая те или иные способы использования ресурсов – способ действий. В качестве синонимов термина «способ действия» часто используют следующие термины: альтернатива, стратегия, управление, решение.

Возможности оперирующей стороны по управлению операцией всегда ограничены рядом естественных причин. Этот факт проявляется в наличии ограничений – дисциплинирующих условий – на выбор способов действий оперирующей стороны – стратегий. Стратегии, удовлетворяющие наложенным ограничениям, называются всевозможными или допустимыми (в смысле заданных ограничений). Понятие «допустимые стратегии» является относительным: класс допустимых стратегий определяется наложенными ограничениями и изменяется, если изменяются ограничения. Реализация той или иной допустимой стратегии оперирующей стороны обычно приводит к различным исходам операции.

Чтобы сравнивать между собой качество различных стратегий, нужно иметь возможность оценивать соответствующие исходы операций. Исход операции оценивается с помощью некоторых критериев качества – критериев эффективности или критериев оптимальности.

Критерий оптимальности является математическим выражением цели операции (математической моделью цели операции), позволяющим количественно определить степень достижения этой цели. Стратегия, наилучшая в смысле выбранного критерия оптимальности, т. е. доставляющая ему требуемое экстремальное (максимальное или минимальное) значение, называется оптимальной стратегией. Синонимами этого термина являются «оптимальное решение», «оптимальное управление» и т. п.

Следует иметь в виду, что понятие «оптимальная стратегия» является не абсолютным, а относительным, как и понятие «допустимая стратегия». Не существует оптимальной стратегии вообще, всякая оптимальная стратегия является наилучшей лишь в некотором узком, совершенно конкретном смысле, определенном критерием оптимальности. Одна и та же стратегия, оптимальная в смысле одного критерия, может оказаться далеко не оптимальной и даже очень плохой по другому критерию. Поскольку значение критерия оптимальности в любой операции зависит от каких-либо величин, описывающих свойства операции, используемые ресурсы и т. д., то критерий оптимальности часто называют также критериальной или целевой функцией (функцией эффективности).

Следующее важное понятие исследования операций – исследователь операции. В составе оперирующей стороны специально выделяется и занимает особое место исследователь операции, или операционист. Он принадлежит к оперирующей стороне и должен преследовать ту же цель, что и оперирующая сторона. Однако операционист не принимает окончательных решений по выбору способов действий, а лишь помогает в этом оперирующей стороне, предоставляя ей количественные основания для принятия решений. Иными словами, исследователь операции имеет право не решающего, а лишь совещательного голоса. Естественно, что поэтому он не должен нести ответственность за принятые решения и последствия от реализации предпринятых действий.

Суть работы исследователя операции состоит в детальном изучении сущности и специфики решаемой проблемы, определении всего набора допустимых стратегий, оценке их качества, сравнении их между собой и определении оптимальной стратегии. Исследование операции завершается рекомендациями по выбору оптимальной стратегии. Само же принятие решения, т. е. окончательный выбор стратегии и её реализация, выходит за рамки исследования и относится к компетенции ответственного лица – руководителя операции.

Уточним содержание исследований, формирующих процесс принятия решений. Процессы принятия решений, реализуемые в самых различных сферах деятельности, имеют очень много общего, поэтому желательно создать некоторую универсальную, типовую схему, устанавливающую наиболее целесообразный набор и последовательность действий, проводимых при исследовании операций. В работах многих авторов по исследованию операций, системному анализу, управлению производством содержатся рекомендации по формированию состава и последовательности исследований в процессе принятия решений. На основе анализа и обобщения этих рекомендаций можно предложить следующий алгоритм типового процесса принятия решений:

1) предварительное формулирование проблемы;

2) определение целей операции и выбор соответствующих критериев оптимальности;

3) выявление и формулирование дисциплинирующих условий;

4) составление возможно более полного списка альтернатив и предварительный их анализ с целью отбрасывания явно неэффективных;

5) сбор необходимой информации и прогнозирование изменений параметров операции в будущем;

6) точное формулирование постановки задачи;

7) разработка математической модели операции, позволяющая оценивать эффективность каждой альтернативы;

8) выбор метода решения задачи и разработка алгоритма решения;

9) оценка альтернатив и определение наиболее эффективных;

10) принятие решения ответственным руководителем;

11) выполнение решения и оценка результатов.

Процесс принятия решений является сложной итеративной циклической процедурой. Действительно, результат практически любого этапа исследований может повлиять на постановку задачи и привести к её изменению. В частности, даже практическое опробование принятого решения, если оно дает нежелательный результат, также является стимулом к пересмотру постановки задачи и поиску новых решений.

Так, в процессе принятия решений осуществляется преобразование информации. На различных этапах процесса принятия решений происходит количественная и качественная переработка исходной информации с целью получения новой информации, концентрированное выражение которой находит свое отражение в решении. Переработка информации происходит в виде последовательных трёх фаз, для каждой из которых характерен свой уровень определенности решения задачи:

1) структуризация;

2) характеризация;

3) оптимизация.

Структуризация заключается в выделении основных элементов решаемой задачи и установлении отношений между ними. В результате структуризации образуется логически упорядоченная система, позволяющая определить необходимую информацию и распределить её по элементам структуры. Результат структуризации отображается в виде схем, таблиц или формальной символической записи. Примерами структуризации являются построение дерева целей, формирование множества альтернативных решений и способов их реализации, установление взаимосвязанной системы гипотез о возможных событиях.

Характеризация заключается в определении системы характеристик, параметров и показателей, количественно описывающих решаемую задачу. Например, для дерева целей могут быть определены приоритеты, или относительные коэффициенты важности целей: для множества решений – предпочтения (полезности), для гипотез о возможных событиях – вероятности их свершения. Выполнение характеризации приводит к более полному и точному описанию решаемой задачи по сравнению с фазой структуризации и подготавливает исходные данные для выполнения оптимизации.

Оптимизация представляет собой поиск наилучшего решения задачи. Именно на этой фазе вся имеющаяся информация преобразуется в конечную форму, описывающую решение и показывающую, как зависят характеристики решения от исходных данных. Проведение оптимизации приводит к полной определенности решения задачи.

Для решения задач в условиях неопределенности не всегда возможно проведение фазы оптимизации в строго формальном виде. Во многих случаях лицо, принимающее решение, осуществляет оптимизацию в неявном виде, опираясь на некоторые общие принципы, профессиональный опыт и свои предположения.

Процесс принятия решения требует полноценного информационного обеспечения, которое предполагает использование как имеющейся информации (априорной информации), так и получение, добывание с помощью экспериментов (опытов) новой послеопытной (апостериорной) информации.

Обобщенной характеристикой решения является эффективность решения. Эта характеристика включает эффект решения, определяющий степень достижения целей и стоимость решения – совокупность затрат ресурсов для принятия и реализации решения. Эффективность решения – это степень достижения целей, отнесенная к затратам на их достижение. Решение тем эффективнее, чем выше степень достижения целей и ниже стоимость затрат.

Система принятия решений – организованная совокупность людей, методов, технических средств, информации и технологии принятия решений для достижения поставленных целей.

1.3. Исследование операций как научная дисциплина

Исследование операций представляет собой научный метод выработки количественно обоснованных рекомендаций по принятию решений.

Учитывая важность количественного фактора в исследовании операций и целенаправленность вырабатываемых рекомендаций, исследование операций можно определить как теорию обоснования оптимальных решений.

Несмотря на различную природу, операции могут быть описаны одними и теми же математическими моделями, более того, анализ этих моделей позволяет лучше понять суть того или иного явления и даже предсказать его дальнейшее развитие. Окружающий мир устроен (в информационном смысле) необычайно компактно, поскольку одна и та же информационная схема используется в самых различных физических (или других) проявлениях.

Благодаря наличию общих закономерностей в развитии самых различных систем их исследование возможно на основе математических методов. Исследование операций сегодня рассматривается как математический инструментарий, поддерживающий процесс принятия решений в разных областях человеческой деятельности, как совокупность методических средств, позволяющих обеспечить лицо, принимающее решение, необходимой количественной информацией, полученной научными методами.

Исследование операций как научная дисциплина сформировалось на стыке математики и разнообразных социально-экономических дисциплин, и поэтому свой вклад в его становление внесли представители самых различных областей наук.

История возникновения исследования операций уходит корнями в далёкое прошлое. Так, ещё в 1885 году Фредерик Тейлор пришёл к выводу о возможности применения научного анализа в сфере производства. Проблема, рассмотренная им, на первый взгляд, кажется тривиальной: «как оптимизировать работу землекопов?». Применение математического аппарата подтвердило несостоятельность принципа «Бери больше, кидай дальше и отдыхай, пока летит». Оказалось, что оптимальный вес грунта, позволяющий максимизировать количество перебрасываемого материала (при разумной экономии рабочей силы) в случае продолжительной работы, значительно меньше того, что может поднять человек при максимальной нагрузке.

Пионером в области перевода сложных военно-стратегических задач на язык математики стал Фредерик Ланчестер. Одним из наиболее значительных результатов, полученных учёным, стало открытие в 1916 г. так называемого квадратичного закона, количественно связывающего достижение победы с двумя основными факторами: численным превосходством живой силы и эффективностью оружия. Было доказано, что при одновременном вступлении в бой численное превосходство в живой силе более важно, чем применение более совершенного вооружения, поскольку главную роль играет сосредоточение собственных войск и расчленение сил противника. Классическим примером использования квадратичного закона Ланчестера является победоносная тактика адмирала Нельсона в сражении при Трафальгаре.

В 1917 г. датский математик А.К. Эрланг, работавший в телефонной компании, сформулировал задачу минимизации потерь времени на установление телефонной связи. Полученные им результаты стали основополагающими принципами в теории телефонных сетей. Позднее формулы Эрланга (среднее время ожидания заявки вызова и др.) были приняты министерством связи Англии в качестве стандарта для расчёта эффективности телефонных соединений. Идеи Эрланга почти на полвека предвосхитили современные теории расчёта характеристик телефонных узлов.

В 1930 г. Г. Левинсон начал применять научный анализ к решению задач, возникающих в торговле. Методика исследования операций была использована для эффективности рекламы, размещения товаров, влияния конъюнктуры на номенклатуру и количества проданных товаров.

В годы Второй мировой войны исследование операций широко применялось для планирования боевых действий. Так, специалисты по исследованию операций работали в штабе командования бомбардировочной операции США, дислоцированном в Англии. Ими исследовались многочисленные факторы, влияющие на эффективность бомбометания. Были выработаны рекомендации, приведшие к 4-кратному повышению эффективности бомбардировок. В начале войны боевое патрулирование самолётов союзников для обнаружения кораблей и подводных лодок противника носило неорганизованный характер. Привлечение специалистов по исследованию операций позволило установить такие маршруты патрулирования и такое расписание полётов, при которых вероятность оставить объект незамеченным была сведена до минимума. Полученные рекомендации были применены для организации патрулирования над Южной частью Атлантического океана с целью перехвата немецких кораблей с военными грузами. Из пяти вражеских кораблей, прорвавших блокаду, три были перехвачены на пути из Японии в Германию, один был обнаружен и уничтожен в Бискайском заливе и лишь одному кораблю удалось скрыться благодаря тщательной маскировке. В годы войны все работы по использованию методов исследования операций были засекречены. По окончании Второй мировой войны группы специалистов по исследованию операций продолжили свою работу в ВС США и Великобритании.

Публикации ряда результатов вызвали всплеск общественного интереса к этому научному направлению. Возникла тенденция к применению методов исследования операций в коммерческой деятельности, в целях реорганизации производства, перевода промышленности на мирные рельсы. Сегодня на развитие математических методов исследования операций в экономике ассигнуются миллионы долларов.

Термин «исследование операций» возник в результате буквального перевода с английского выражения operations research, введенного в конце 30-х годов XX века как условное наименование одного из подразделений британских ВВС, занимавшегося вопросами эффективного использования радиолокационных систем в общей системе противовоздушной обороны. Первоначально исследование операций (ИО) было связано с решением задач военного содержания, но уже с конца 40-х годов оно используется для решения технико-экономических задач и задач управления на различных уровнях. В 50-60-е годы на Западе создаются научные общества и центры исследования операций, выпускающие научные журналы, а ряд американских университетов включает эту дисциплину в свои учебные планы.

В рамках исследования операций начинают формироваться отдельные самостоятельные направления – линейное программирование, выпуклое программирование, теория игр, теория массового обслуживания и др. В настоящее время под исследованием операций понимают применение математических методов количественного обоснования решений в конкретной области целенаправленной человеческой деятельности (Е.С. Вентцель).

Исследование операций как научное направление характерно для завершающих этапов жизненного цикла системы (эксплуатация, применение по назначению) и предполагает формализованное описание операции и количественный анализ факторов, определяющих достижение поставленных в операции задач. Основной задачей исследования операций является применение научных принципов и математических методов к исследованию функционирования систем с целью оценки характеристик и формирования рекомендаций по выбору оптимальных решений, обеспечивающих наиболее эффективное применение системы в конкретных условиях.

Выделим методические особенности исследования операций:

1. Построение формализованной модели операции, предназначенной для получения количественных оценок альтернативных решений.

2. Необходимость охвата различных сторон деятельности.

3. Учёт прошлого опыта при исследовании аналогичных операций.

4. Использование результатов экспериментов, поставленных в различной форме (игры, испытания, учения и т. д.).

5. Направленность результата на количественное обоснование альтернатив и упрощение процесса принятия решения, а не на выдачу самого решения.

Объектом исследования в ИО является конкретная реально существующая (например, экономическая) система.

Предметом исследования в ИО являются характеристики или показатели, отражающие эффективность применения системы по целевому предназначению в конкретных условиях.

Исследование операций позволяет количественно оценить эффективность работы системы в конкретных условиях и выработать рекомендации по улучшению её характеристик. Содержательно всякая задача исследования операций является оптимизационной, т.е. состоит в выборе среди некоторого множества допустимых решений, которые можно в том или ином смысле квалифицировать как оптимальные. При этом допустимость каждого решения принимается в смысле его фактического осуществления, а оптимальность – в смысле его целесообразности.

Содержанием теоретического аспекта ИО является математический анализ оптимизационных задач и нахождение их оптимальных решений.

Прикладной аспект ИО заключается в составлении (постановке) оптимизационных задач и в определении их оптимальных решений.

Постановка задачи ИО охватывает, прежде всего, формальное описание множества допустимых решений и критериев оптимального выбора. Оно должно соответствовать содержательным представлениям о возможном и целесообразном выборе в данных условиях. Проверка адекватности самих содержательных представлений объективной реальности и реализация решения уже выходят за пределы области интересов ИО. Все решения (в том числе и оптимальные) принимаются всегда на основе информации, которой располагает принимающий решения субъект. Поэтому каждая задача ИО в своей постановке должна отражать структуру и динамику знаний линейного программирования (ЛПР) о множестве допустимых решений и о критерии оптимальности. Например, если принятие решения происходит в уже известном и не изменяющемся информационном состоянии, то задача называется статической. В таких условиях весь процесс принятия решения может быть сведён к единому мгновенному акту.

Выделим основные этапы операционного исследования:

1) наблюдение явления, сбор и систематизация исходных данных;

2) постановка задачи исследования;

3) разработка концептуальной (операционной) модели;

4) построение и преобразование математической модели к каноническому виду;

5) расчет характеристик или оптимизация параметров модели;

6) анализ выходных данных; если полученные результаты не удовлетворяют исследователя, то следует либо вернуться на этап 3 или 4, т.е. предложить для решения задачи другую математическую модель, либо вернуться на этап 2, т.е. собрать дополнительную информацию и корректно сформулировать задачу;

7) разработка рекомендаций по выбору рациональной структуры (алгоритма, параметров) системы или её компонентов.

Таким образом, операционное исследование в общем случае представляет собой итерационный процесс исследования, каждый следующий шаг которого приближает нас к решению конкретной проблемы.

В центре операционного исследования находятся построение и расчет параметров математической модели (ММ) операции.

Математическая модель – это система математических соотношений, приближенно, в абстрактной форме описывающих изучаемый процесс или систему.

Экономико-математическая модель – это математическая модель, предназначенная для исследования экономической проблемы.

1.4. Виды задач исследования операций

Параметры операционной модели, совокупность которых образует решение, называются элементами решения.

В качестве элементов решения могут фигурировать различные числа, векторы, функции, физические признаки. Например, если составляется план перевозок однородных грузов из пунктов отправления в пункты назначения, то элементами решения будут числа, показывающие, какое количество груза будет отправлено из i-го пункта отправления A_i в j-й пункт назначения B_j.

Совокупность чисел образует решение. В простейших задачах исследования операций количество элементов решения может быть сравнительно невелико. Но в большинстве задач, имеющих практическое значение, число элементов решения достаточно велико. Кроме элементов решения, которые в заданных пределах можно изменять, в задаче исследования операций имеются априорно заданные «дисциплинирующие» условия, которые фиксированы с самого начала и нарушены быть не могут (например, грузоподъемность машины; размер планового задания; весовые характеристики оборудования и т. п.). В частности, к таким условиям относятся располагаемые ресурсы (материальные, технические, людские, информационные) и иные ограничения, налагаемые на решение. В своей совокупности они формируют так называемое множество возможных решений. Обозначим это множество буквой X, а тот факт, что решение x принадлежит этому множеству, будем записывать в виде формулы: $x \in X$. Речь идет о том, чтобы в множестве возможных решений X выделить те решения x, которые с той или иной точки зрения эффективнее (удачнее, предпочтительнее) других. Чтобы сравнивать между собой по эффективности разные решения, нужно иметь какой-то количественный критерий, так называемый показатель эффективности, его часто называют целевой функцией. Этот показатель выбирается так, чтобы он отражал целевую направленность операции. «Лучшим» будет считаться то решение, которое в максимальной степени способствует достижению поставленной цели. Чтобы выбрать показатель эффективности W, нужно, прежде всего, ответить на вопрос: чего мы хотим, к чему стремимся, предпринимая операцию?

Выбирая решение, естественно, предпочитают такое, которое обращает показатель эффективности W в максимум (или же в минимум). Например, доход от операции хотелось бы обратить в максимум; если же показателем эффективности являются затраты, их желательно обратить в минимум. Если показатель эффективности желательно максимизировать, цель задачи укажут в виде $W \to max$, а если минимизировать, то в виде $W \to min$.

Очень часто выполнение операции сопровождается действием случайных факторов (изменение курса валют, колебания спроса и предложения, действия конкурентов и т.д.). В таких случаях обычно в качестве показателя эффективности берется не сама переменная величина, которую хотелось бы максимизировать (минимизировать), а ее среднее значение (математическое ожидание). В некоторых случаях операция, сопровождаемая случайными факторами, преследует какую-то вполне определенную цель A, которая может быть только полностью достигнута или совсем не достигнута (схема «да – нет»). Тогда в качестве показателя эффективности выбирается вероятность достижения этой цели. Неправильный выбор показателя эффективности может привести к ошибочным решениям и к неоправданным затратам и потерям. Для иллюстрации принципов выбора показателя эффективности рассмотрим примеры.

Пример 1.1. План снабжения предприятий.

Имеется ряд предприятий, потребляющих известные виды сырья, и есть ряд сырьевых баз, которые могут поставлять это сырье предприятиям. Базы связаны с предприятиями какими-то путями сообщения (железнодорожными, водными, автомобильными, воздушными) со своими тарифами. Требуется разработать такой план снабжения предприятий сырьем (с какой базы, в каком количестве и какое сырье доставляется), чтобы потребности в сырье были обеспечены при минимальных расходах на перевозки.

Задача операции – обеспечить снабжение сырьем при минимальных расходах на перевозки. Показатель эффективности R – суммарные расходы на перевозки сырья за единицу времени, например месяц. Цель операции – обеспечить $R \rightarrow min$.

Пример 1.2. Постройка участка магистрали.

Сооружается участок железнодорожной магистрали. В распоряжении ЛПР определенное количество ресурсов: людей, техники, стройматериалов и т.д. Требуется спланировать строительство (т.е. назначить очередность работ, распределить машины и людей по участкам пути, обеспечить ремонтные работы) так, чтобы оно было завершено в минимально возможный срок. Естественным показателем эффективности является время завершения стройки, однако оно связано со случайными факторами (отказы техники, задержки в выполнении отдельных работ). Поэтому в качестве показателя эффективности целесообразно выбрать среднее ожидаемое время Т окончания стройки. Цель операции – обеспечить $T \rightarrow min$.

Пример 1.3. Продажа сезонных товаров.

Для реализации определенной массы сезонных товаров создается сеть временных торговых точек. Требуется выбрать: число точек, их размещение, товарные запасы и количество персонала на каждой из них так, чтобы обеспечить максимальную экономическую эффективность распродажи. В качестве показателя эффективности можно взять среднюю ожидаемую прибыль П от реализации товаров за сезон ($П \rightarrow max$).

Пример 1.4. Снегозащита дорог.

В условиях Восточной Сибири метели, заносящие снегом дороги, представляют серьезную помеху движению. Любой перерыв движения приводит к экономическим потерям. Существует ряд возможных способов снегозащиты (профиль дороги, защитные щиты и т. д.), каждый из которых требует известных затрат на сооружение и эксплуатацию. Известны господствующие направления ветров, есть данные о частоте и интенсивности снегопадов. Требуется разработать наиболее экономически эффективные средства снегозащиты с учетом потерь, связанных с заносами. Речь идет о наиболее выгодном экономически плане снегозащиты, поэтому в качестве показателя эффективности можно выбрать средние за единицу времени (например, за год) расходы R на содержание и эксплуатацию дорог, включая расходы, связанные как с сооружением защитных устройств, так и с расчисткой дорог и задержками транспорта. Цель операции – обеспечить $R \to min$.

Пример 1.5. Выборочный контроль продукции.

Завод выпускает определенного вида изделия. Для обеспечения их высокого качества организуется система выборочного контроля. Требуется разумно организовать контроль (т. е. выбрать размер контрольной партии, набор тестов, правила браковки и т. д.) так, чтобы обеспечить заданный уровень качества при минимальных расходах на контроль. Естественный показатель эффективности, подсказанный формулировкой задачи, это средние ожидаемые расходы R на контроль за единицу времени, при условии, что система контроля обеспечивает заданный уровень качества, например средний процент брака не выше заданного ($R \to min$).

1.5. Прямые и обратные задачи исследования операций

Задачи исследования операций, встречающиеся в экономической практике, делятся на две категории: а) прямые; б) обратные.

Прямые задачи отвечают на вопрос: что будет, если в заданных условиях будет принято конкретное решение. В частности, чему будет равен, при данном решении х, выбранный показатель эффективности W (или же ряд таких показателей)? Для решения такой задачи строится математическая модель, позволяющая выразить один или несколько показателей эффективности через заданные условия и элементы решения.

Обратные задачи отвечают на вопрос: как выбрать решение х для того, чтобы показатель эффективности W обратился в максимум? Естественно, что модель прямой задачи исследования операций проще модели обратной задачи.

Очевидно также, что для решения обратной задачи исследования операций, прежде всего, надо уметь решать прямую задачу. Для некоторых типов операций прямая задача решается настолько просто, что ею специально не занимаются. Для других типов операций построение математической модели и вычисление показателя (показателей) эффективности само по себе далеко не тривиально (так, например, обстоит дело с прямыми задачами теории массового обслуживания).

Остановимся подробнее на обратных задачах. Если число возможных вариантов решения, образующих множество X, невелико, то можно просто вычислить величину W для каждого из них, сравнить между собой полученные значения и непосредственно указать один или несколько оптимальных вариантов, для которых W достигает максимума. Такой способ нахождения оптимального решения называется «простым перебором».

Однако когда число возможных вариантов решения, образующих множество X, велико, поиск среди них оптимального «вслепую», простым перебором затруднителен, а зачастую практически невозможен. В этих случаях применяются методы «направленного перебора», обладающие той общей особенностью, что оптимальное решение находится рядом последовательных «попыток» или «приближений», из которых каждое последующее приближает нас к искомому оптимальному.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

1. Обоснуйте актуальность и практическую ценность выделения и изучения проблем принятия решений в процессе управления.

2. Перечислите условия возникновения задачи принятия решений.

3. Укажите особенности экономической системы как объекта системного исследования. Укажите факторы, которые затрудняют строгое математическое описание экономических процессов.

4. На примере конкретной экономической системы укажите план содержательного описания – обобщённой модели объекта исследования.

5. Дайте характеристику объекта и предмета исследования операций.

6. Приведите примеры прикладных задач исследования операций.

7. Какие математические методы используются в задачах исследования операций?

8. Каковы функции операциониста в задачах исследования операций?

9. Сформулируйте и приведите пример прямой задачи исследования операций.

10. Сформулируйте и приведите пример обратной задачи исследования операций.

Глава 2. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ

Линейное программирование – это частный раздел оптимального программирования. Суть принципа оптимальности состоит в стремлении выбрать такое планово-управленческое решение $f(x)=(x_1,x_2,....,x_n)$, где $x_j,\,(j=\overline{1,n})$ – его компоненты, которое наилучшим образом учитывали бы внутренние возможности и внешние условия производственной деятельности хозяйствующего субъекта. Выражение «наилучшим образом» подразумевает некоторый критерий оптимальности, позволяющий сравнивать эффективность тех или иных решений. Традиционные критерии оптимальности: «максимум прибыли», «минимум затрат», «максимум рентабельности» и др.

Слова «учитывало бы внутренние возможности и внешние условия производственной деятельности» означают, что на выбор решения накладывается ряд условий. Таким образом, реализовать на практике принцип оптимальности в планировании и управлении – значит решить экстремальную задачу, т.е. найти максимум или минимум функции

$$f(x)=(x_1,x_2,....,x_n) \tag{2.1}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1,x_2,\dots x_n)\{\le,=\ge\}\,b_1, \\ \varphi_2(x_1,x_2,\dots x_n)\{\le,=\ge\}\,b_2, \\ \dots\dots\dots \\ \varphi_m(x_1,x_2,\dots x_n)\{\le,=\ge\}\,b_m, \\ x_j\ge 0,\ j=\overline{1,n} \end{cases} \tag{2.2}$$

Или более компактная запись:

$$max(min)f(x)=(x_1,x_2,....,x_n), \tag{2.3}$$

$$\varphi_i(x_1,x_2,\dots x_n)\{\le,=,\ge\}\,b_i,\ i=\overline{1,m}, \tag{2.4}$$

$$x_j\ge 0,\ j=\overline{1,n}. \tag{2.5}$$

В задаче линейного программирования (ЗЛП) требуется найти экстремум (максимум или минимум) линейной целевой функции $f(X)$:

$$x_j\ge 0,\ j=\overline{1,n} \tag{2.6}$$

при ограничениях (условиях):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \ \{\le, =, \ge\}\, b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \ \{\le, =, \ge\}\, b_2, \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \ \{\le, =, \ge\}\, b_m, \end{cases} \tag{2.7}$$

$$x_j \ge 0;\ j = \overline{1,n}, \tag{2.8}$$

где $a_{ij,} b_i, c_j$ $\left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right)$ – заданные постоянные величины.

Так записывается общая ЗЛП в развернутой форме; знак $\{\le, =, \ge\}$ означает, что в конкретной ЗЛП возможно ограничение типа равенства или неравенства (в ту или иную сторону).

Систему ограничений (2.7) называют функциональными ограничениями ЗЛП, а ограничения – прямыми.

Вектор $\{\le, =, \ge\}$, удовлетворяющий системе ограничений (2.7), (2.8), называется допустимым решением или планом ЗЛП. План (допустимое решение), который доставляет максимум или минимум целевой функции (2.6), называется оптимальным планом (оптимальным решением) ЗЛП.

Термины «решение» и «план» – синонимы, однако первый используется чаще, когда речь идет о формальной стороне задачи (ее математическом решении), а второй – о содержательной стороне (экономической интерпретации).

Наиболее часто встречаются две разновидности задач линейного программирования:

1. Каноническая (основная). Система ограничений, помимо тривиальных ограничений, включает в себя только уравнения.

Канонической формой записи ЗЛП (КЗЛП) называют задачу вида: найти

$$max\ f\left(\overline{X}\right) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{2.9}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = \overline{1,m}, \tag{2.10}$$

$$x_j \ge 0,\ b_i \ge 0,\ i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}. \tag{2.11}$$

Векторная форма записи КЗЛП имеет вид:

найти

$$max\, f(\overline{X}) = CX$$

при ограничениях

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \dots A_nx_n = B,\, x \ge 0,$$

где $C = (c_1, c_2, \dots c_n)$ и $X = (x_1, x_2, \dots x_n)$ – вектор строки; CX – их скалярное произведение; A_j и B – вектор-столбцы:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ . \\ . \\ . \\ a_{m1} \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ . \\ . \\ . \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots\ A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ . \\ . \\ . \\ a_{mn} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Матричная форма записи КЗЛП:

$$max\, f(\overline{X}) = CX$$

при условиях

$$AX = B,\, X \ge 0\ ,$$

где $C = (c_1, c_2, \dots c_n)$ – вектор-строка; $A = (a_{ij})$ – матрица размерности $m \times n$, столбцами которой являются вектор-столбцы A_j;

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_m \end{pmatrix} \text{– вектор-столбец, } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix} \text{– вектор-столбец.}$$

2. Стандартная (симметричная). Система ограничений состоит только из неравенств:

$$max(min)\, f(\overline{X}) = CX\ ,$$

$$AX \le (\ge) B,\, X \ge 0.$$

При этом запись $X \ge 0$ понимают как вектор (или вектор-столбец, в зависимости от контекста), у которого все компоненты неотрицательны.

Приведение ЗЛП к каноническому виду осуществляется введением в левую часть соответствующего ограничения вида (2.7) $k-й$ дополнительной переменной $x_{n+k} \ge 0$ со знаком «–» в случае ограничения типа «≥» и со знаком «+» в случае ограничения типа «≤».

Например, стандартный вид ЗЛП:

$$f(x) = -2x_1 + x_2 + 1 \to min,$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 1 \ge 0, \\ x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Ее канонический вид:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 1 \ge 0, \\ x_1 - x_2 - x_4 \ge 0, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0. \end{cases}$$

2.1. Графический метод решения задач линейного программирования

Рассмотрим ЗЛП в стандартной форме записи:

$$max(min)\, f(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n, \quad (2.12)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases} \quad (2.13)$$

$$x_j \ge 0;\ j = 1, 2, \ldots, n. \quad (2.14)$$

Рассмотрим эту задачу на плоскости, т. е. в случае, когда число переменных равно двум: $n = 2$. Пусть система (2.13), (2.14) совместна (имеет хотя бы одно решение):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$$

Каждое неравенство этой системы геометрически определяет полуплоскость с граничной прямой $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$, $i = \overline{1,m}$. Условия неотрицательности определяют полуплоскости соответственно с граничными прямыми $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Система совместна, поэтому полуплоскости, пересекаясь, образуют общую часть, которая является выпуклым множеством и представляет собой совокупность точек, координаты каждой из которых составляют решение данной системы. Совокупность этих точек называют многоугольником решений. Это может быть точка, отрезок, луч, замкнутый многоугольник, неограниченная многоугольная область (рис. 2.1).

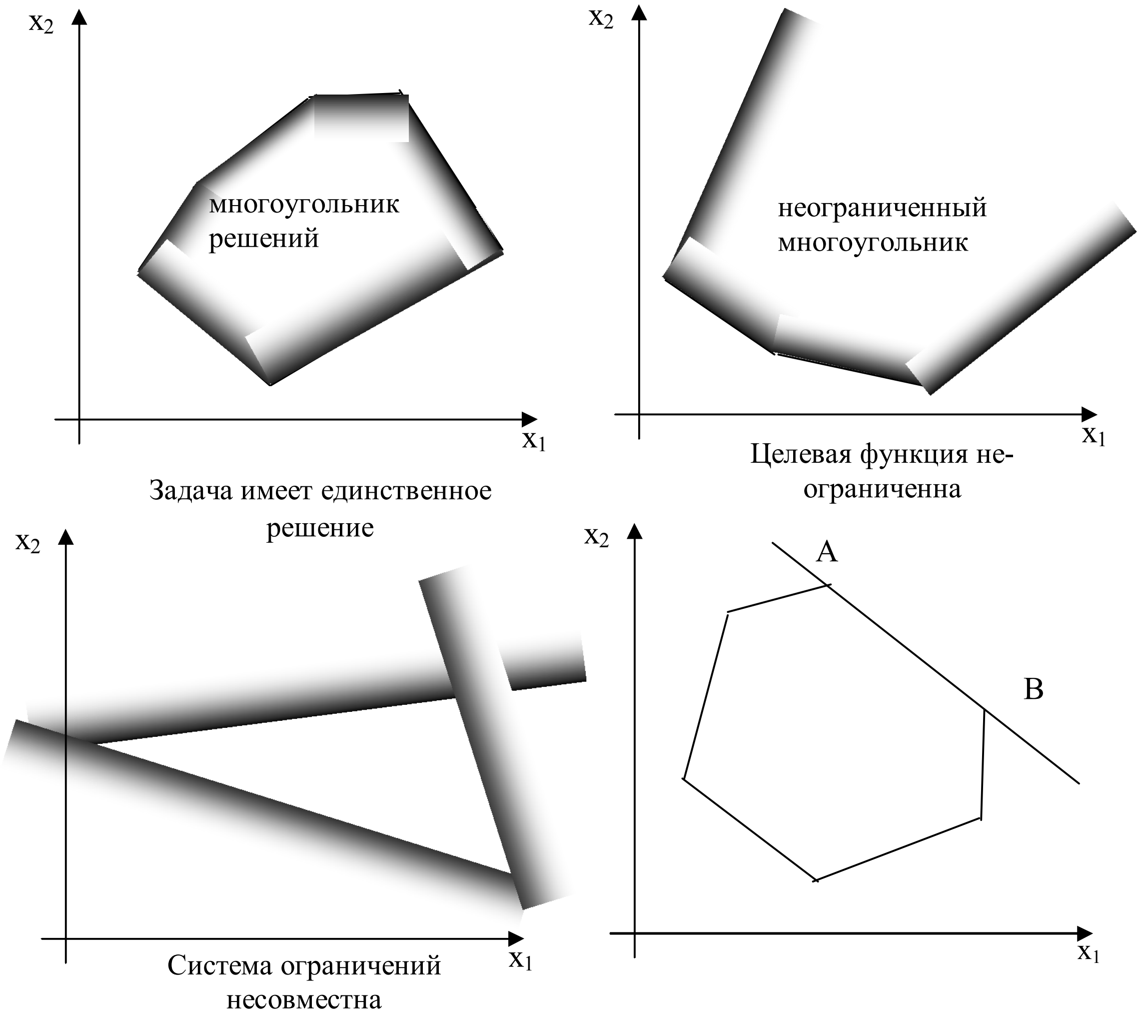


Рис. 2.1. Различные варианты многоугольников решений

Таким образом, геометрически ЗЛП (2.12)–(2.14) представляет собой поиск такой точки многогранника решений, координаты которой доставляют линейной (целевой) функции наибольшее (наименьшее) значение, причем допустимыми решениями являются все точки многогранника решений.

Приведем пример решения конкретной задачи.

Найти *max* и *min* функции $f(x) = x_1 + x_2$ при заданной системе ограничений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 16, \\ -4x_1 + 2x_2 \le 8 \;\; и \;\; x_1, x_2 \ge 0, \\ x_1 + 3x_2 \ge 9. \end{cases}$$

По заданным ограничениям построим многоугольник допустимых решений. Для этого:

1) Во всех неравенствах выразим x_2 через x_1:

$$\begin{cases} x_2 \le 4 - \dfrac{x_1}{2}, & (1) \\ x_2 \le 4 + 2x_1, & (2) \\ x_2 \ge 3 - \dfrac{x_1}{3}. & (3) \end{cases}$$

2) Вместо неравенств запишем равенства:

$$\begin{cases} x_2 = 4 - \dfrac{x_1}{2}, & (1) \\ x_2 = 4 + 2x_1, & (2) \\ x_2 = 3 - \dfrac{x_1}{3}. & (3) \end{cases}$$

Построим графики функций ограничения (рис. 2.2).

На графике все эти подробности пропущены и вверху в табличках сразу записаны результаты для трех прямых.

x_1	0	8
x_2	4	0

- пара точек уравнения (1)

x_1	-2	0
x_2	0	4

- пара точек уравнения (2)

x_1	0	9
x_2	3	9

- пара точек уравнения (3)

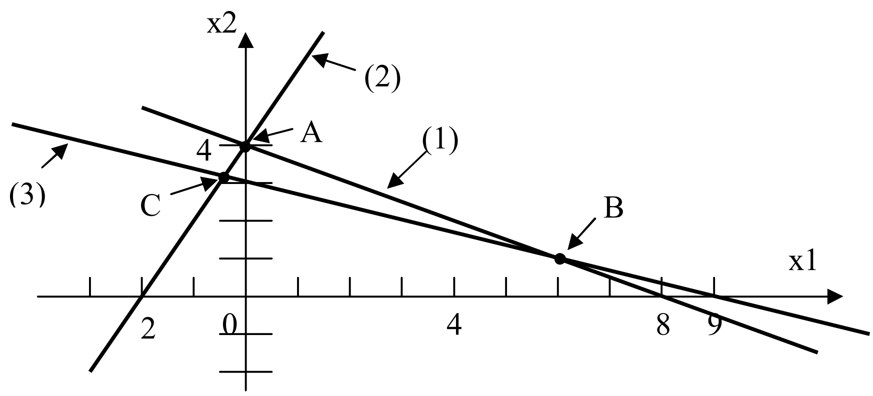


Рис. 2.2. Графическое решение задачи

Поскольку все уравнения – уравнения первой степени, то им соответствуют прямые линии. Известно, что через две точки можно провести только одну линию. Поэтому для построения графика прямой линии обычно находят любые две (неважно какие) точки и через них по линейке проводят искомую линию. Для простоты обычно делают так. Полагают одну переменную, равной нулю, и из уравнения находят вторую переменную. Таким образом, получают одну точку. Потом наоборот. Получают две необходимые точки, наносят их на график и через них проводят прямую линию. Так, из уравнения $x_2 = 4 - \frac{x_1}{2}$ получим следующее. Положим $x_1 = 0$, тогда $x_2 = 4$. То есть получили одну точку $M_1(0{,}4)$. Теперь, наоборот: если $x_2 = 0$, то из уравнения следует, что $x_1 = 8$. Получили вторую точку $M_2(8{,}0)$. Наносим их на график и получаем прямую 1.

Далее найдем координаты точек пересечения прямых (1), (2) и (3):

1) Пересечением прямых (1) и (2) является точка А. Для нахождения ее координат нужно решить систему уравнений, составленных, соответственно, из 1-го и 2-го уравнений:

$$\begin{cases} x_2 = 4 - \dfrac{x_1}{2} \\ x_2 = 4 + 2x_1 \end{cases} \rightarrow \quad 4 - \frac{x_1}{2} = 4 + 2x_1 \quad \rightarrow \quad x_1 = 0 .$$

Нашли первую координату. Подставив значение x_1 в любое уравнение системы, найдем значение второй координаты точки А, определяющей пересечение прямых 1 и 2 – $x_2 = 4$. Таким образом, координатами точки А будут $A(0, 4)$.

Так как $f(x) = x_1 + x_2$, то значение целевой функции в точке А будет равно – $f(0{,}4) = 4$.

2) Пересечением прямых линий 1 и 3 является точка В . Её координаты находим аналогичным образом:

$$\begin{cases} x_2 = 4 - \dfrac{x_1}{2} \\ x_2 = 3 - \dfrac{x_1}{3} \end{cases} \rightarrow \quad 4 - \frac{x_1}{2} = 3 - \frac{x_1}{3} \quad \rightarrow \quad x_1 = 6 \quad \rightarrow \quad x_2 = 1 .$$

Таким образом, координаты точки В – $B(6{,}1)$.

Так как $f(x) = x_1 + x_2$, то значение целевой функции в точке B – $f(6{,}1) = 7$.

3) Пересечением прямых линий 2 и 3 является точка C . Ее координаты находим таким же образом:

$$\begin{cases} x_2 = 4 + 2x_1 \\ x_2 = 3 - \dfrac{x_1}{3} \end{cases} \rightarrow \quad 4 + 2x_1 = 3 - \frac{x_1}{3} \quad \rightarrow \quad x_1 = -\frac{3}{7} \quad \rightarrow \quad x_2 = \frac{22}{7}.$$

Но по условию необходимо, чтобы $x_1 \geq 0$. Следовательно, исходя из графика, точка C' имеет координаты $C'(0{,}3)$. И поскольку $f(x) = x_1 + x_2$, то значение функции в точке C' – $f(0{,}3) = 3$.

4) Отсюда вытекает, что $max\, f(x)$ находится в точке B с координатами $B(6{,}1)$, как показано на рис. 2.3.

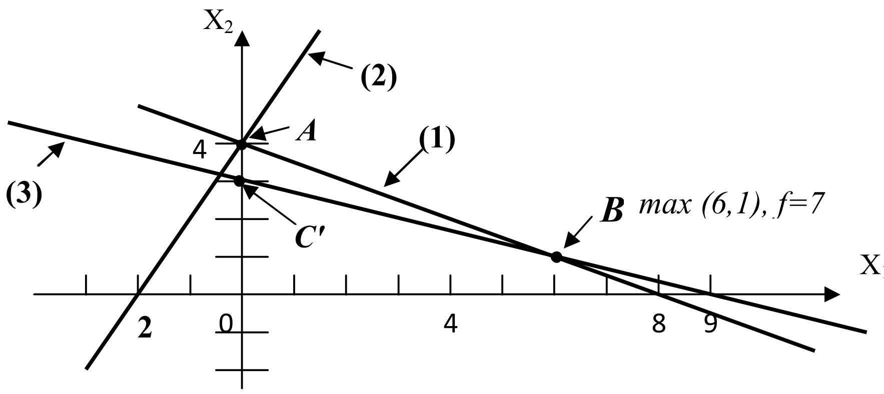


Рис. 2.3. Нахождение максимума

Рассмотрим теперь некоторые модели экономических задач.

1. Задача об использовании ресурсов (планировании производства)

Необходимо составить такой план производства продукции, при котором прибыль от ее реализации будет максимальной.

Введем следующие обозначения:

x_j – число единиц некоторой продукции P_j, которая запланирована к производству;

b_i – запас некоторого ресурса S_i;

$a_{i,j}$ – некоторое число единиц ресурса S_i, затрачиваемое на единицу продукции P_j;

c_i – прибыль от реализации продукции P_j.

С этими обозначениями математическая модель задачи будет иметь вид:

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots . c_nx_n \to max \quad ,$$

где $f(x)$ целевая функция – общая прибыль предприятия. Естественно, она должна быть максимальна. На это накладываются ограничения:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \ , \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \, , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{m2}x_n \le b_m \, . \end{cases}$$

И условие неотрицательности:

$$x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0, \ \ldots . \ x_n \ge 0 \, .$$

Содержательная интерпретация задачи:

Составить такой план выпуска продукции $X = (x_1, x_2, \ldots x_n)$, *при котором прибыль от реализации продукции будет максимальной при условии, что потребление ресурсов по каждому виду продукции не превзойдет имеющихся запасов.*

Рассмотрим теперь частные случаи.

Пусть для некоторого предприятия прибыль от единицы продукции P_1 составляет 2 руб., т. е. $c_1 = 2$, а от единицы продукции P_2 – 3 руб., т. е. $c_2 = 3$. Запасы ресурсов и их затратность представлены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Запасы и затратность ресурсов

Вид ресурса	Запас ресурса	Число единиц ресурса, затрачиваемых на изготовление единицы продукции	
		P1	P2
S1	18	1	3
S2	16	2	1
S3	5	-	1
S4	21	3	-

Составим экономико-математическую модель.

Целевая функция $f(x) = 2x_1 + 3x_2 \quad \to \quad max$,

ограничения

$$\begin{cases} 1x_1 + 3x_2 \le 18\,, \\ 2x_1 + 1x_2 \le 16\,, \\ \quad 1x_2 \le 5, \\ \quad 3x_1 \le 21. \end{cases}$$

условие неотрицательности: $x_1; x_2 \ge 0$.

2. Задача о составлении рациона (технологическая задача)

Необходимо составить такой дневной рацион, имеющий минимальную стоимость, в котором содержание каждого вида питательных веществ было бы не менее установленного предела.

Введем обозначения:

x_j – число единиц корма j-го вида;

b_i – необходимый минимум содержания в рационе питательного вещества b_i;

a_{ij} – число единиц питательного вещества S_i в единице корма j-го вида;

c_i – стоимость единицы корма j-го вида.

Тогда математическая модель задачи будет иметь вид:

целевая функция

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots . c_nx_n \to min,$$

система ограничений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \ge b_1\,, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \ge b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{m2}x_n \ge b_m\,. \end{cases}$$

условие неотрицательности

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ \ldots .\ x_n \ge 0\,.$$

Частный случай.

Стоимость 1кг корма вида I – 4 руб., а вида II – 6 руб. Используя данные табл. 2.2, составить такой рацион питания, чтобы стоимость была минимальной, а содержание каждого вида питательных веществ было не менее установленного предела.

Составим таблицу (см. табл. 2.2).

Таблица 2.2

Составление рациона питания

Питательное вещество	Необходимый минимум питательных веществ	Число единиц питательного вещества в 1 кг корма	
		I	II
S1	9	3	1
S2	8	1	2
S3	12	1	3

Ей соответствует экономико-математическая модель:

целевая функция $f(x) = 4x_1 + 6x_2 \quad \to \quad min$,

ограничения

$$\begin{cases} 3x_1 + 1x_2 \geq 9\ , \\ 1x_1 + 2x_2 \geq 8\ , \\ 1x_1 + 3x_2 \geq 12\,. \end{cases}$$

Условие неотрицательности $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$.

3. Задача об использовании мощностей (задача о загрузке оборудования)

Предприятию задан план производства продукции по времени и номенклатуре: требуется за время T выпустить $n_1, n_2, \dots n_k$ единиц продукции $P_1, P_2, \dots P_k$. Продукция производится на станках $S_1, S_2, \dots S_m$. Для каждого станка известны производительность a_{ij} и затраты b_{ij} на изготовление продукции P_j на станке S_i в единицу времени.

Необходимо составить такой план работы станков, чтобы затраты на производство всей продукции были минимальными.

Экономико-математическая модель задачи.

Обозначим через x_{ij} – время, в течение которого станок S_i будет занят изготовлением продукции P_j.

Целевая функция $f(x)$ имеет вид:

$$f(x) = b_{11}x_{11} + b_{12}x_{12} + \dots b_{mk}x_{mk} \to min.$$

Так как время каждого станка ограничено и не превышает T, то справедливы следующие неравенства.

Ограничения по времени:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \dots x_{1k} \le T, \\ x_{21} + x_{22} + \dots x_{2k} \le T, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{m1} + x_{m2} + \dots x_{mk} \le T. \end{cases}$$

Удовлетворение номенклатуре выпуска:

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{21}x_{21} + \dots + a_{m1}x_{m1} = n_1, \\ a_{12}x_{12} + a_{22}x_{22} + \dots + a_{m2}x_{m2} = n_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1k}x_{1k} + a_{2k}x_{2k} + \dots + a_{mk}x_{mk} = n_k. \end{cases}$$

После решения поставленной задачи возникают вопросы: что можно сделать, чтобы улучшить полученное решение, насколько устойчиво полученное решение и т. д. На эти вопросы отвечает следующий этап задач линейного программирования.

Анализ чувствительности задачи линейного программирования

Первая задача на чувствительность

Первая задача на чувствительность отвечает на вопрос: на сколько (можно/нужно) сократить или увеличить запасы ресурсов?

1) На сколько можно увеличить запас некоторого ресурса для улучшения полученного оптимального значения целевой функции f?

2) На сколько можно снизить запас некоторого ресурса при сохранении полученного оптимального значения целевой функции f?

Рассмотрим вопрос на конкретном примере.

Необходимо определить суточную производственную программу небольшого цеха по пошиву женской одежды. Требуется установить *количество брюк и юбок, которые нужно сшить за сутки, если известны затраты на пошив этих изделий и их цена реализации на рынке. Суточный спрос на брюки не превышает 18 шт. Доход должен быть максимальным* (табл. 2.3).

Таблица 2.3

Производственная программа цеха

Производственные факторы	Расходы на одно готовое изделие		Максимально возможный суточный запас
	брюки	юбки	
Ткань, м	1,5	2	42
Трудоемкость, чел./ч	3	2	60
Накладные расходы, руб.	5	5	200
Цена одного изделия, руб.	60	50	–

Имеем задачу линейного программирования:

целевая функция

$$f(x) = 60x_1 + 50x_2 \rightarrow max,$$

ограничения

$$\begin{cases} 1{,}5x_1 + 2x_2 \le 42 \quad (1) \quad \textit{по} \quad \textit{ткани}, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 60 \quad (2) \quad \textit{по} \quad \textit{трудоемкости}, \\ 5x_1 + 5x_2 \le 200 \quad (3) \quad \textit{по} \quad \textit{накладным} \quad \textit{расходам}, \\ x_1 \le 18 \quad (4) \quad \textit{по} \quad \textit{спросу}. \end{cases}$$

условие неотрицательности $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$.

где x_1 – число брюк, x_2 – число юбок, пошитых за день.

Решим задачу графическим способом (рис. 2.4).

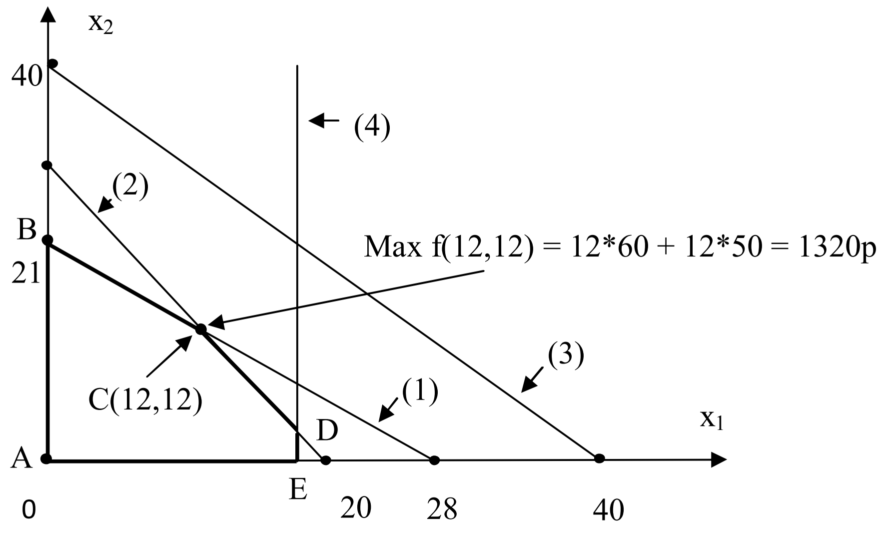


Рис. 2.4. Графическое изображение пространства решений задачи

Таким образом, число брюк, которое необходимо пошить – $x_1 = 60$, число юбок – $x_2 = 50$, при этом целевая функция достигает максимума, равного $f_{max} = 12 \cdot 60 + 12 \cdot 50 = 1320$.

Ограничения линейной модели классифицируют:

– на связывающие (активные) – в нашем случае прямые 1 и 2;

– и несвязывающие (неактивные) – в нашем случае прямые 3, 4.

Прямая, представляющая связывающее ограничение, должна проходить через оптимальную точку.

Если ограничение связывающее, то соответствующий ему ресурс называется дефицитным.

Ресурс, с которым ассоциировано несвязывающее ограничение, – недефицитный (прямая 3) .

Ограничения, которые не участвуют в формировании пространства допустимых значений, – *избыточные* (прямая линия 3).

Анализ модели на чувствительность включает:

1) нахождение предельно допустимого увеличения запаса дефицитного ресурса, позволяющего улучшить найденное оптимальное решение (неравенства (1) и (2));

2) нахождение предельно допустимого снижения запаса недефицитного ресурса, не изменяющего найденное ранее оптимальное значение целевой функции (неравенство (3).

Рассмотрим первый пункт. Найдем предельно допустимое увеличение запаса дефицитных ресурсов: ткани и трудоемкости, графики которых выражены прямыми 1 и 2 соответственно. Можно изменить неравенство (1) – запас ткани, выражающее область допустимых значений прямой 1. Например, увеличим запас ткани, но так, чтобы точка пересечения С прямых 1 и 2 сдвинулась влево и вверх (при этом возрастет целевая функция f), но не перешла бы точку пересечения прямой 2 с осью x_2. Точка пересечения прямой 2 с осью x_2 имеет координаты $x_1 = 0$, $x_2 = 30$ – $M(0{,}30)$. И это будет новая опорная точка прямой 1. Но чтобы прямая 1 прошла через новую опорную точку $M_1(0{,}30)$, должен измениться запас ткани. Обозначим новый запас ткани как Z. Таким образом, прямая 1 будет описываться уравнением

$$1{,}5x_1 + 2x_2 = Z .$$

Подставив координаты новой опорной точки $x_1 = 0$ и $x_2 = 30$, получим:

$$1{,}5 \cdot 0 + 2 \cdot 30 = Z \quad \to \quad Z = 60.$$

При этом координаты второй опорной точки прямой 1 будут определяться из нового уравнения прямой 1' (рис. 2.4):

$$1{,}5x_1 + 2x_2 = 60,$$

$$x_1 = 0, x_2 = 30 \quad \to \quad M_1(0{,}30);$$

$$x_2 = 0, x_1 = 40 \quad \to \quad M_2(40{,}0).$$

Следовательно, прямая *1'* будет иметь другое расположение, показанное на рис. 2.4.

То есть если запас ткани увеличить с 42 до 60 м, то целевая функция увеличится с $f = 60 \cdot 12 + 50 \cdot 12 = 1320$ до $f = 60 \cdot 0 + 50 \cdot 30 = 1500$, при этом точка максимума целевой функции сместится из точки $C(12{,}12)$ в точку $M_1(0{,}30)$.

Графически это будет выглядеть следующим образом (рис. 2.5).

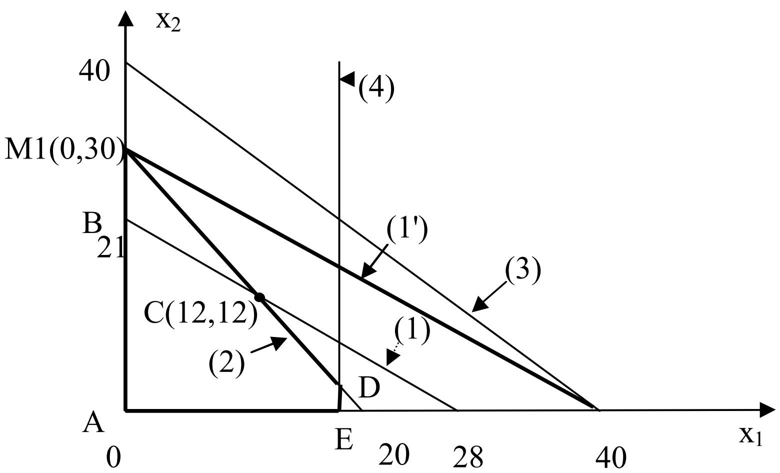


Рис. 2.5. Изменение суточного запаса ткани

Таким образом, запас ткани можно увеличить на $60 - 42 = 18$ м, при этом доход возрастет на $60 - 42 = 18$ руб. Рассмотрим теперь прямую 2 – ограничение по трудоемкости. Ее точка пересечения с осью x_2 – $(0{,}30)$. Передвинем эту точку вверх (при этом будет возрастать целевая функция f), но так, чтобы не перейти точку пересечения прямой 3 с осью x_2, имеющей координаты $M_3(0{,}40)$. При этом изменится ресурс трудоемкости. Он теперь будет иметь значение не 60, а некоторое Y, т. е. уравнение прямой 2' будет иметь вид: $3x_1 + 2x_2 = Y$. Подставим в него координаты $(0{,}40)$ – точка пересечения прямой 3 с осью x_2, которая теперь будет принадлежать прямой 2'. Получим $3 \cdot 0 + 2 \cdot 40 = Y \quad \rightarrow \quad Y = 80$. Следовательно, уравнение прямой ограничения суточного фонда рабочего времени будет иметь вид: $3x_1 + 2x_2 = 80$. А точка пересечения прямой (2') с осью x_1 будет иметь координаты $(26{,}7;0)$ (рис. 2.6). Целевая функция в точке $M_3(0{,}40)$ станет $f = 60 \cdot 0 + 50 \cdot 40 = 2000$, т.е. доход возрастет на 680 руб. при увеличении трудового ресурса на 80 – 20 = 20 чел./ч.

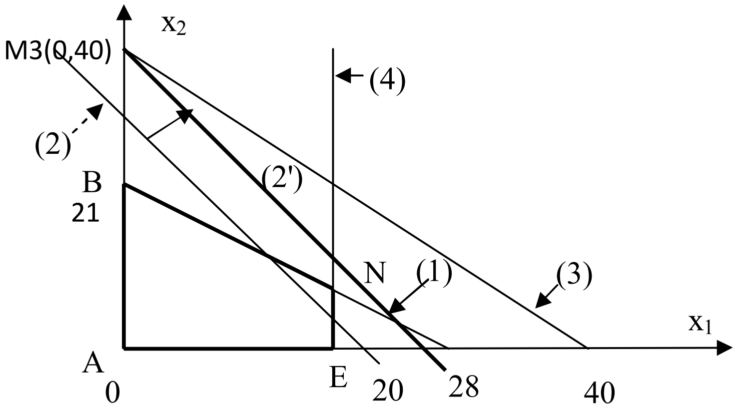


Рис. 2.6. Изменение суточного фонда рабочего времени

Рассмотрим второй пункт – изменение суточного запаса средств на накладные расходы (прямая 3 – $5x_1 + 5x_2 = 200$). Проанализируем рис. 2.7. Увеличение накладных расходов приведет к тому, что прямая 3 расположится еще дальше от начала координат, что никак не повлияет на целевую функцию.

Снижение накладных расходов и перемещение прямой 3 вниз до пересечения с точкой C(12, 12) также никак не повлияет на целевую функцию. Подставим координаты точки C(12; 12) в ограничение 3. Получим: 5*12+5*12=120. Таким образом, снижение накладных расходов на 80 руб. – с 200 до 120 руб. – никак не повлияет на оптимальное решение. Снижение накладных расходов более чем на 80 руб. приведет к уменьшению значения целевой функции (см. рис. 2.7).

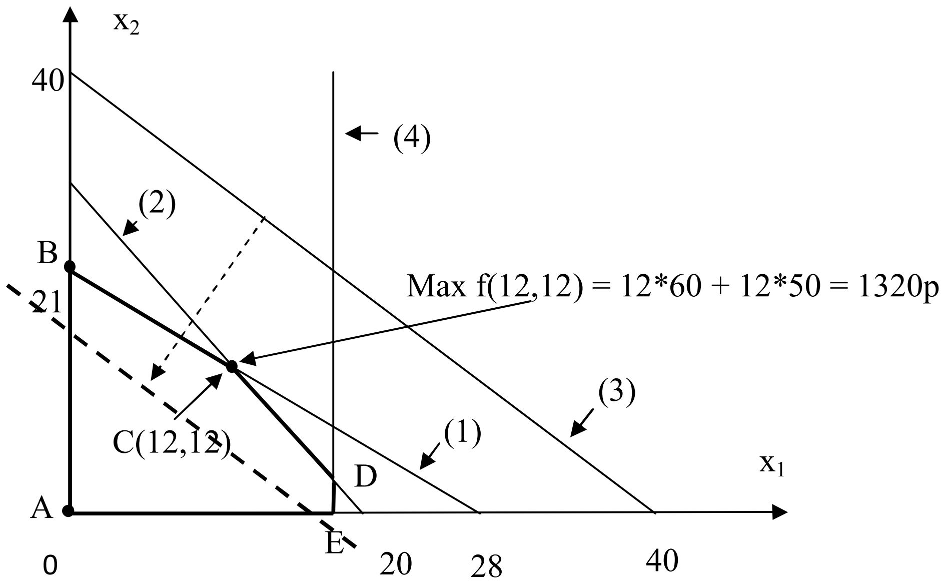


Рис. 2.7. Изменение суточного запаса средств
на накладные расходы

Увеличение спроса на брюки никак не повлияет на оптимальную точку, так как увеличение запаса избыточного ресурса не изменит оптимальный производственный план. Уменьшение спроса на брюки изменит расположение оптимальной точки только тогда, когда спрос уменьшится до уровня менее 12 брюк в сутки (рис. 2.8).

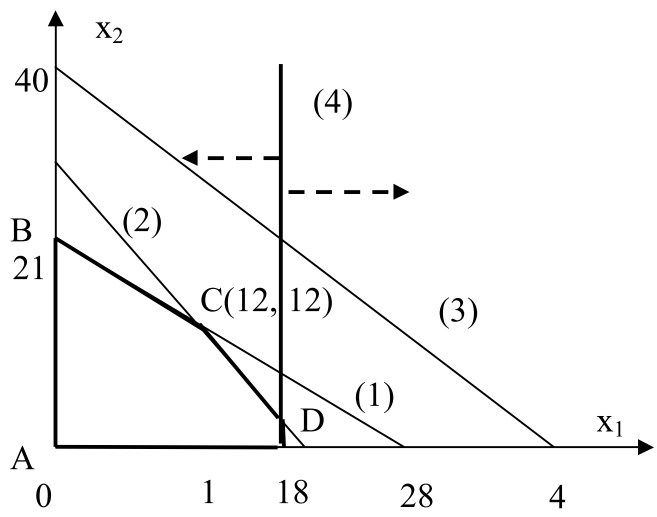


Рис. 2.8. Изменение спроса на брюки

Результаты проведенного исследования сведем в табл. 2.4.

Таблица 2.4

Результаты исследования

Ресурсы	Тип ресурсов	Максимальное изменение запаса ресурсов	Максимальное изменение дохода от реализации, р.
1 (ткань)	Дефицитный	60 – 42 = 18 м.	1500 – 1320 = 180 р.
2 (труд)	Дефицитный	Невозможно	1455 – 1320 = 15 р.
3 (накладн.)	Избыточный	Может только уменьшить	Может только уменьшить
4	Недефицитный	Безразлично	Безразлично

Вторая задача на чувствительность

Ответим теперь на следующий вопрос: увеличение объема какого ресурса наиболее выгодно?

Пусть ценность дополнительной i-й единицы ресурса – y_i. Тогда величина y_i определяется из соотношения:

$$y_i = \frac{\textit{максимальное приращение оптимального значения дохода } F}{\textit{максимально допустимый прирост ресурса } i}.$$

Так, для предыдущей задачи при увеличении запаса ткани на 18 м прибыль увеличилась на 180 руб. Следовательно, ценность y_1 ресурса ткани будет равна:

$$y_1 = \frac{180 р}{18 м} = 10 \text{ руб./м.}$$

В то же время увеличение трудового ресурса на 20 чел./час приводит к увеличению прибыли на 680 руб. Следовательно, ценность y_2 трудового ресурса будет равна:

$$y_2 = \frac{680 р}{20\ чел./ч} = 10 \text{ руб./(чел./ч).}$$

Следовательно, ценность трудового ресурса выше, чем ценность запаса ткани.

Третья задача на чувствительность

Рассмотрим теперь, в каких пределах допустимо изменение коэффициентов целевой функции? Или в нашем случае, в каких пределах допустимо изменение цены выпускаемой продукции.

1) Каков диапазон изменения того или иного коэффициента целевой функции, при котором не происходит изменения оптимального решения?

2) Насколько следует изменить тот или иной коэффициент целевой функции, чтобы изменить статус (дефицитный – недефицитный) некоторого ресурса?

В качестве примера рассмотрим тот же цех по пошиву женской одежды. Его целевая функция имеет вид:

$$f(x) = 60x_1 + 50x_2 \to max,$$

т. е. $c_1 = 60$, $c_2 = 50$. Построим график целевой функции:

$$f(x) = 60x_1 + 50x_2 \quad .$$

Из уравнения видно, что графиком целевой функции будет являться прямая линия, проходящая через оптимальную точку С(12; 12), и ее значение в этой точке – 1320, т. е. уравнение целевой функции можно записать в виде

$$f(x) = 60x_1 + 50x_2 = 1320.$$

Эта прямая пересекает ось x_2 в точке $(0; 26{,}4)$, ось x_1 – в точке $(0; 22)$, как показано на рис. 2.9.

При изменении коэффициентов c_1 и c_2 график целевой функции вращается вокруг точки $C(12{,}12)$ по часовой или против часовой стрелки. Действительно, запишем уравнение целевой функции в виде $y = kx + b$:

$$x_2 = -\frac{60}{50}x_1 + \frac{1320}{50} = -\frac{c_1}{c_2}x_1 + 26{,}4,$$

где $k = -\frac{c_1}{c_2} = tg\alpha$ – угловой коэффициент, α – угол наклона прямой к

положительному направлению оси Ox_1.

Так как $k < 0$, то $\alpha > \frac{\pi}{2}$.

Отсюда видно, что если увеличивается c_1 или уменьшается c_2, то угловой коэффициент увеличивается и угол α увеличивается, т. е. прямая вращается по часовой стрелке.

Если же c_1 уменьшается или c_2 увеличивается, то угловой коэффициент уменьшается и угол α уменьшается, т. е. прямая вращается против часовой стрелки (рис. 2.9).

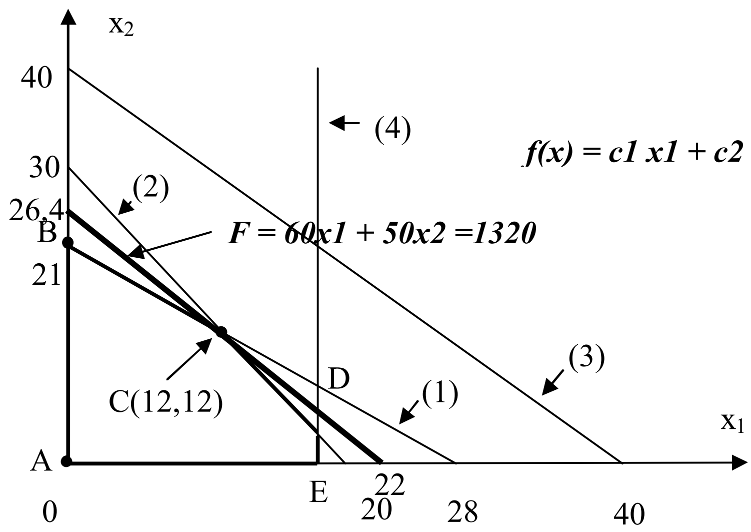


Рис. 2.9. График прямой целевой функции

Вычислим границы интервалов возможных колебаний c_1 и c_2, при которых точка С останется оптимальной.

Зафиксируем $c_2 = 50$, тогда целевая функция будет иметь вид:

$$F = c_1 x_1 + 50 x_2 \quad \rightarrow \quad x_2 = \frac{F}{50} - \frac{c_1}{50} x_1 .$$

Известно, что если уравнение прямой линии записано в виде $y = kx + b$, то коэффициент перед x численно равен тангенсу угла α, углу наклона прямой к оси OX, т.е. $k = tg\alpha$. Применительно к нашему случаю коэффициент перед x_1, т. е. $-\frac{c_1}{50}$, численно равен тангенсу угла α, угла наклона прямой к оси x1 , а именно, $tg\alpha = -\frac{c_1}{50}$.

Точка С будет оставаться оптимальной до тех пор, пока наклон прямой не выйдет за пределы, определяемые наклонами прямых ограничения 1 и ограничения 2.

Уравнение прямой 1, как мы видели, имеет вид:

$$1{,}5 x_1 + 2 x_2 = 42 .$$

Преобразовав, получим:

$$x_2 = \frac{42}{2} - \frac{1{,}5}{2}x_1 \quad \rightarrow \quad x_2 = 21 - \frac{3}{4}x_1,$$

т. е. тангенс угла наклона прямой 1 к оси x_1 равен $tg\alpha_1 = -\frac{3}{4}$.

Уравнение прямой 2 имеет вид:

$$3x_1 + 2x_2 = 60.$$

Сделав аналогичные преобразования, получим:

$$x_2 = \frac{60}{2} - \frac{3}{2}x_1 \quad \rightarrow \quad x_2 = 30 - \frac{3}{2}x_1,$$

т.е. тангенс угла наклона прямой 2 к оси x_1 равен $tg\alpha_2 = -\frac{3}{2}$ (рис. 2.10).

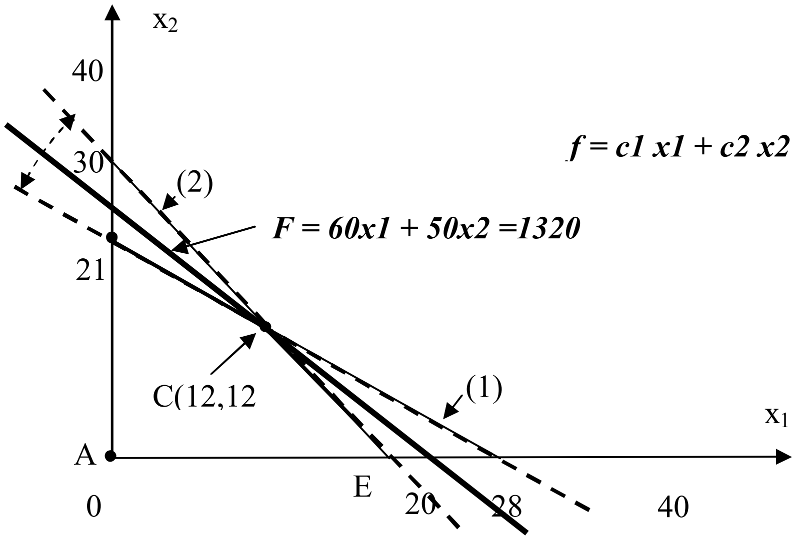


Рис. 2.10. Изменение положения прямой целевой функции при колебаниях цены c1

Определим теперь диапазон колебаний c_1:

$$tg\alpha = tg\alpha_1 \quad \rightarrow \quad -\frac{c_1}{50} = -\frac{3}{4} \quad \rightarrow \quad c_1 = 37{,}5,$$

$$tg\alpha = tg\alpha_2 \quad \rightarrow \quad -\frac{c_1}{50} = -\frac{3}{2} \quad \rightarrow \quad c_1 = 75.$$

Таким образом, интервал изменения c_1, в котором точка C – единственная оптимальная, определяется неравенством $37{,}5 \le c_1 \le 75$.

Зафиксируем теперь $c_1 = 60$, тогда целевая функция:

$$F = 60x_1 + c_2 x_2.$$

Отсюда

$$x_2 = \frac{F}{c_2} - \frac{60}{c_2} x_1 \quad \to \quad tg\alpha = -\frac{60}{c_2}.$$

Но ранее мы нашли, что тангенс угла наклона α заключен в пределах $-\frac{3}{2} \le tg\alpha \le -\frac{3}{4}$. Следовательно, можно записать:

$$-\frac{3}{2} \le -\frac{60}{c_2} \le -\frac{3}{4} \quad \to \quad 40 \le c_2 \le 80.$$

Таким образом, интервал изменения c_2, в котором точка C – единственная оптимальная, определяется неравенством $40 \le c_2 \le 80$.

При достижении коэффициентом c_1 значения, равного $c_1 = 37{,}5$, ресурс 2 становится недефицитным. То есть, если доход от продажи одних брюк станет меньше 37,5 руб., надо пересматривать суточную производственную программу. Когда значение c1 превысит 75 руб., суточная производственная программа будет предусматривать пошив 18 брюк и 3 юбок (оптимальный план – точка D).

2.2. Симплекс-метод решения задач линейного программирования

Если число переменных в ЗЛП больше двух, то на плоскости их уже не отразишь и, соответственно, графический метод решения не пригоден. Для этого случая разработаны различные методы решения, среди которых наиболее распространенным является симплексный метод (или симплекс-метод), разработанный американским ученым Дж. Данцигом.

Суть этого метода заключается в том, что вначале получают допустимый вариант, удовлетворяющий всем ограничениям, но не обязательно оптимальный (так называемое начальное опорное решение). Оптимальность достигается последовательным улучшением исходного варианта за определенное число этапов (итераций). Нахождение начального опорного решения и переход к следующему опорному решению проводится на основе метода Жордана – Гаусса для системы линейных уравнений в канонической форме, в которой должна быть предварительно записана исходная ЗЛП. Направление перехода от одного опорного решения к другому выбирается на основании критерия оптимальности (целевой функции) исходной задачи.

Рассмотрим симплекс-метод решения ЗЛП на примере. Предположим, что надо решить ЗЛП симплекс-методом:

$$f = 2x_1 + x_2 \to max$$

$$3x_1 \le 27 \qquad (1)$$

$$2x_2 \le 30 \qquad (2)$$

$$x_1 + x_2 \le 20 \qquad (3)$$

$$x_{1,2} \ge 0$$

При этом необходимо найти оптимальный производственный план, максимальную прибыль и определить свободный запас каждого ресурса.

Вначале, для ориентира, решим эту задачу графическим способом (рис. 2.11). Найдем точку из многоугольника ОАВСД, в которой целевая функция принимает максимальное значение:

$$A(0;15) - f(A) = 15;$$

$$B(5;15) - f(B) = 25; \; C(9;11) - f(C) = 29;$$

$$D(9;0) - f(D) = 18; \; f(O) = 0.$$

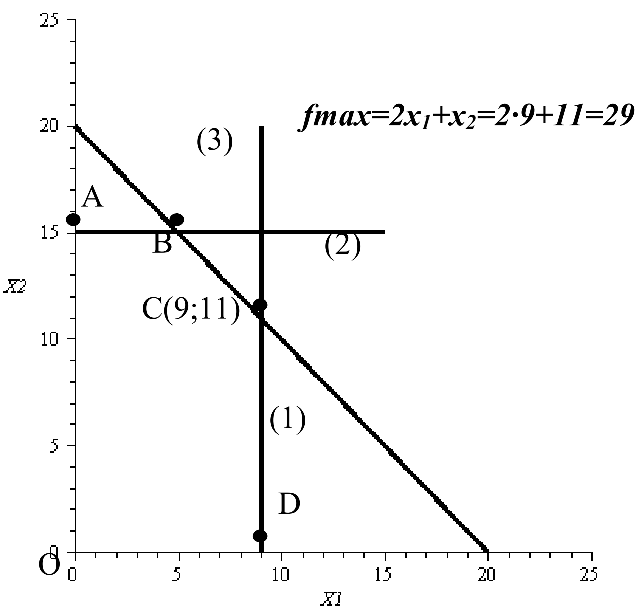


Рис. 2.11. Графическое решение задачи

Целевая функция $f = 2x_1 + x_2$ принимает максимальное значение в точке С(9; 11).

Решим теперь эту задачу симплекс-методом.

Для этого приведем систему ограничений к каноническому виду, введя дополнительные переменные x_3, x_4, x_5, как показано ниже:

$$3x_1 \le 27 \quad \to \quad 3x_1 + x_3 = 27,$$

$$2x_2 \le 30 \quad \to \quad 2x_2 + x_4 = 30,$$

$$x_1 + x_2 \le 20 \quad \to \quad x_1 + x_2 + x_5 = 20,$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0.$$

Поскольку все ограничения имеют вид «≤», то дополнительные переменные вошли со знаком «+». Так как число ограничений равно трем, то число дополнительных переменных также равно трем.

Чтобы целевая функция не изменилась, коэффициенты перед введенными дополнительными переменными полагаем равными нулю:

$$f = 2x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5,$$

т. е. полагаем, что $c_3 = c_4 = c_5 = 0$. Таким образом, расширенная матрица системы ограничений примет вид:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 27 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 30 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 20 \end{array}\right).$$

Пунктирным прямоугольником выделена единичная матрица, которую мы добавили. Эта единичная матрица дает начальное базисное решение (для чего она и вводится):

$$f = 0; \quad (0; 0; 27; 30; 20),$$

т. е. $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 27$, $x_4 = 30$ и $x_5 = 20$. Это нулевое, тривиальное решение редко является оптимальным (проверка на оптимальность рассмотрена ниже).

Заполняем нулевую симплекс-таблицу (табл. 2.5). Здесь A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, B – столбцы исходной матрицы (1).

Таблица 2.5

Нулевая симплекс-таблица

Номер симплекс-таблицы	Базис	c_i / c_j	c_j					План B	Q*
			2	1	0	0	0		
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5		
0	A_3	0	***3***	0	1	0	0	27	9
	A_4	0	0	2	0	1	0	30	∞
	A_5	0	1	1	0	0	1	20	20
	$\Delta_j = \sum_{i=3}^{5} c_i a_{ij} - c_j$		-2	-1	0	0	0	0	

* Отношение плана к значениям элемента ведущего столбца.

Далее определяется симплекс-разница – $\Delta_j = \sum_{i=3}^{5} c_i a_{ij} - c_j$. Всегда в нулевой симплекс-таблице сумма в симплекс-разнице (первое слагаемое) равна нулю. Действительно, как следует из табл. 2.5, c_i принимают значения $c_3 = 0$; $c_4 = 0$; $c_4 = 0$. Таким образом, симплекс-разница равна $\Delta_j = -c_j$. Поэтому, например, для первого столбца: $\Delta_1 = -c_1 = -2$.

Поэтому обычно без каких-либо расчетов в эту строчку записывают коэффициенты c_j, взятые с обратным знаком. Либо рассуждают так. В начальном базисном приближении целевая функция равна нулю, так как $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Поэтому переписывают целевую функцию в виде:

$$f = 2x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \ ,$$

$$f - 2x_1 - x_2 - 0 \cdot x_3 - 0 \cdot x_4 - 0 \cdot x_5 = 0 \ ,$$

$$0 - 2x_1 - x_2 - 0 \cdot x_3 - 0 \cdot x_4 - 0 \cdot x_5 = 0 \ .$$

И коэффициенты последнего уравнения заносят в последнюю строчку нулевой симплекс-таблицы.

Поэтому очень часто в симплекс-таблице вообще нет столбца c_j / c_i .

Далее, поскольку в нулевом базисном решении участвует единичная матрица с третьим, четвертым и пятым столбцами, в план записывают именно это базисное решение.

Полученное решение $f = 0;$ $(0; 0; 27; 30; 20)$ хотя и удовлетворяет всем ограничениям, но не является оптимальным, поскольку в последней строчке симплекс-таблицы присутствуют неположительные элементы. Чтобы план был оптимальным, необходимо, чтобы в последней строке не было неположительных элементов.

Геометрически это соответствует решению в начале координат – точка O:

$$O(0;0),\ f(O)=0.$$

Далее преобразовывают симплекс-таблицу по определенным правилам так, чтобы в последней строке $(-2;-1;0;0;0)$ не осталось неположительных элементов. (За один шаг, или за одну итерацию, обычно это сделать не удается, поэтому проводят несколько итераций по одним и тем же правилам).

Процесс итерации включает несколько шагов.

1. Определяют ведущий, или опорный столбец. При этом ориентируются на последнюю строку: выбирают тот столбец, для которого элемент последней строки имеет наименьшее значение. В нашем случае это элемент *-2*, следовательно, ведущий – столбец A_1.

2. В ведущем столбце выбирают ведущий элемент по следующему правилу. Ищут отношение элементов столбца *B* к соответствующим элементам ведущего столбца A_1: 1. 27/3=9; 2. 30/0=∞; 3. 20/1=20. Эти значения заносят в последний столбец под названием Q. Из полученных значений выбирают наименьшее. В нашем случае это 9, т. е. ведущий элемент находится на пересечении столбца A_1 и строки A_3 и равен *3*.

3. Составим первую симплекс-таблицу (табл. 2.6). Для этого все элементы ведущей строки делят на ведущий элемент, в нашем случае *3*. Результаты заносят в эту же строку первой симплекс-таблицы.

Таблица 2.6

Первая симплекс-таблица

Номер симплекс-таблицы	Базис	2	1	0	0	0	План	
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	B	Q
Исходная	A_3	***3***	0	1	0	0	27	9
	A_4	*0*	2	0	1	0	30	∞
	A_5	*1*	1	0	0	1	20	20
		-2	-1	0	0	0	0	
1	$\boldsymbol{x_1}$	1	*0*	1/3	0	0	9	∞
	A_4	0	2	0	1	30	30	15
	A_5	0	1	-1/3	0	1	11	11
		0	-1	2/3	0	0	18	

4. Далее стремятся к тому, чтобы в остальных строках элементы столбца A_1 стали равными нулю. В нашем случае во второй строке A_4 на позиции столбца A_1 уже стоит 0, поэтому с ней ничего делать не будем, а просто перепишем. В третьей строке A_5 в столбце A_1 стоит *1*. Очевидно, чтобы превратить ее в ноль, к ней нужно прибавить *-1*. Но прибавлять и отнимать что-либо произвольно нельзя. Прибавлять и отнимать следует только соответствующие элементы ведущей строки, умноженные на некоторый подобранный коэффициент. Поэтому ко всем элементам третьей строки прибавим соответствующие элементы ведущей строки, умноженные на *-1/3*.

Первый элемент ведущей строки *3* умножаем на *-1/3*, получаем *-1*, прибавляем к *1* (элемент столбца A_1 третьей строки), получаем 0 и записываем его на место элемента столбца A_1 третьей строки. Дальше – аналогично для всех других элементов.

Последний элемент ведущей строки *27* делим на *-3*, получаем *-9*, прибавляем к *20* (первый элемент третьей строки), получаем *11*, записываем на место последнего элемента третьей строки первой симплекс-таблицы (см. табл. 2.6).

В столбце A_1 последней строки стоит *-2*. Необходимо, чтобы вместо *-2* стоял *0*. Для этого нужно к *-2* прибавить *2*. Поэтому все элементы ведущей строки умножаем на *2/3* и прибавляем к соответствующим элементам третьей строки.

5. В результате преобразований в базисе должны остаться столбцы, для которых элементы в последней строке равнялись нулю. В исходной симплекс-таблице (см. табл. 2.5) в последней строке нули стояли в столбцах A_3, A_4 и A_5. Именно поэтому они стояли как базисные. В первой симплекс-таблице (см. табл. 2.6) в последней строке у столбцов A_4 и A_5 нули остались, поэтому они остаются в базисе на своих местах.

Но у элемента A_3 в последней строке стоит не ноль, а *2/3*. Поэтому он не может быть базисным. В то же время у столбца A_1 в последней строке появился ноль. Следовательно, теперь этот столбец становится базисным на месте A_3. Другое название этого столбца x_1, поэтому запишем x_1 на место A_3.

Следовательно, получим первое базисное приближение:

$$f = 18; \quad (9; 0; 0; 30; 11).$$

Графически это соответствует решению в точке $D(9;0)$, $f(D) = 18$ (см. рис. 2.10). Но это решение еще не является оптимальным, поскольку в последней строке первой симплекс-таблицы есть еще неположительные элементы. Поэтому первую симплекс-таблицу преобразовывают дальше, по тем же правилам, стремясь все так же, чтобы в последней строке не было неположительных элементов.

1. Определяем ведущий столбец, т. е. столбец с наименьшим значением элемента в последней строке. Это столбец A_2 со значением элемента *-1*.

2. Выбираем ведущий элемент в ведущем столбце A_1, для чего ищем значения Q (как и в исходной таблице). Заполняем столбец Q . Получаем значения – $(\infty;15;11)$. Выбираем наименьшее, т. е. *11*. Таким образом, ведущий элемент – единица.

3. Третья, ведущая строка, остается без изменений, поскольку ведущий элемент уже равен единице. Без изменений остается и первая строка, поскольку в ней элемент A_2 уже равен нулю. Поэтому эти строки также переписываем без изменений.

4. Чтобы во второй строке элемент столбца A_2 стал равным нулю, все элементы третьей строки умножим на *–2* и прибавим к соответствующим элементам второй строки.

Чтобы элемент A_2 последней строки стал равным нулю, ко всем элементам последней строки добавим соответствующие элементы третьей, ведущей строки.

5. У предыдущего базиса x_1 в последней строке стоит ноль, поэтому он остался на своем месте. У предыдущего базиса A_4 в последней строке стоит ноль, поэтому он также остался на своем месте. У предыдущего базиса A_5 в последней строке стоит единица, поэтому он выбывает из базиса. Но теперь в последней строке ноль стоит у базиса A_2. Поэтому он входит в базис вместо A_5. Но базис A_2 – это x_2, поэтому вместо A_5 запишем x_2.

Таблица 2.7

Вторая симплекс-таблица

Номер симплекс-таблицы	Базис	2	1	0	0	0	План	Q
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	B	
Исходная	A_3	***3***	0	1	0	0	27	9
	A_4	*0*	2	0	1	0	30	∞
	A_5	*1*	1	0	0	1	20	20
		-2	-1	0	0	0	0	
1	$\boldsymbol{x_1}$	1	*0*	1/3	0	0	9	∞
	A_4	0	2	0	1	30	30	15
	A_5	0	1	-1/3	0	1	11	11
		0	-1	2/3	0	0	18	
2	$\boldsymbol{x_1}$	1	0	1/3	0	0	9	
	A_4	0	0	2/3	1	-2	8	
	$\boldsymbol{x_2}$	0	1	-1/3	0	1	11	
		0	0	1/3	0	1	29	

Во второй симплекс-таблице (табл. 2.7) в последней строке нет неположительных значений, поэтому полученный план является оптимальным. Итак,

$$f = 29; \quad (9; 11; 0; 8; 0).$$

Графически это решение соответствует точке $C(9;11)$ и $f(C) = 29$ (рис. 2.11). При решении экономических задач, направленных на оптимизацию ресурсного распределения, с помощью симплексного метода базисные переменные A_3, A_4, A_5 выражают соответственно остаток ресурсов S_1, S_2, S_3 .

Для уяснения экономического смысла перепишем отдельно итоговую симплекс-таблицу (табл. 2.8).

Таблица 2.8

Итоговая симплекс-таблица

Базисные переменные	Переменные					Правая часть	Комментарий
	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	B	
x_1	1	0	1/3	0	0	9	Значение x_1
S_2	0	0	2/3	1	-2	8	Значение ресурса S_2
x_2	0	1	-1/3	0	1	11	Значение x_2
Целевая функция f	0	0	1/3	0	1	29	Максимальное значение прибыли

1. Из табл. 2.8 видно, что ресурсы S_1 и S_3 расходуются полностью и являются дефицитными (их нет в столбце B), так как только на пересечении строки S_2 и столбца B есть значение остатка запаса ресурса.

2. Также видно, что остаток ресурса $S_2 = 8$.

3. Теневая цена для ограничения 1 – первая строка – составляет 1/3. То есть, если реализуется 1кг ресурса для первого ограничения сверх нормы, прибыль возрастет на 1/3 условных единицы. Необходимо иметь в виду, что так называемая теневая цена никакого отношения к рыночной цене не имеет. Это своя «ценность» внутри данной фирмы.

4. Теневая цена для ограничения 3 – третья строка – составляет -1/3. То есть, если реализуется 1 кг ресурса третьего ограничения сверх нормы, прибыль уменьшится на 1/3 условных единицы.

Анализ чувствительности итоговой симплекс-таблицы

Анализ чувствительности итоговой симплекс-таблицы позволяет определить, насколько возможно улучшить полученное решение, а также степень его устойчивости.

Рассмотрим алгоритм анализа на примере итоговой симплекс-таблицы 2.8.

1. Влияние на оптимальное решение задачи сверхнормативного запаса ресурса S_1 в количестве 1 кг.

2. Влияние на оптимальное решение задачи сверхнормативного запаса ресурса S_1 в количестве 2 кг.

3. Влияние на оптимальное решение задачи увеличения запаса ресурса S_3 на 5 кг.

4. Максимальное дополнительное количество ресурса S_3, которое используется полностью и не приводит к созданию излишка ресурса.

5. Влияние на оптимальное решение задачи уменьшения запаса ресурса S_1 в количестве 2 кг.

1. Модифицированные элементы итоговой симплекс-таблицы при наличии 1 кг ресурса S_1 дополнительно представлены в табл. 2.9.

Таблица 2.9

Модифицированные элементы итоговой симплекс-таблицы при наличии 1 кг ресурса S_1

Базисные переменные	Теневые цены					План B	Модифицированный план B
	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3		
x_1	1	0	1/3	0	0	9	9+1/3=$9\frac{1}{3}$
S_2	0	0	2/3	1	-2	8	8+2/3=$8\frac{2}{3}$
x_2	0	1	-1/3	0	1	11	11-1/3=$10\frac{2}{3}$
Целевая функция f	0	0	1/3	0	1	29	29+1/3=$29\frac{1}{3}$

Согласно правилам преобразования матриц, к элементам одного столбца можно добавлять элементы другого столбца, умноженные на какой-либо коэффициент. При этом определитель получившейся матрицы будет равен определителю исходной матрицы.

Это правило применимо и к столбцу B, к которому добавили соответствующие элементы столбца S_1 и получили модифицированный столбец B.

Если запас первого ресурса увеличить на одну треть, запас третьего ресурса уменьшить на одну треть, то целевая функция возрастет на одну треть, а неиспользованный запас ресурса S_2 возрастет на две трети.

Графически (рис. 2.12) это означает, что ограничение 1 – $3x_1 = 27$, $x_1 = 9$ станет $x_1 = 9\,{}^1\!/_3$. Координаты точки C станут C_1:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 20\ , \\ x_1 = \dfrac{28}{3} = 9{,}3(3)\ , \end{cases}$$

$$C_1(9{,}3(3); 10{,}6(6)).$$

То есть $x_1 = \dfrac{28}{3} = 9\dfrac{1}{3}$, $x_2 = \dfrac{32}{3} = 10\dfrac{2}{3}$.

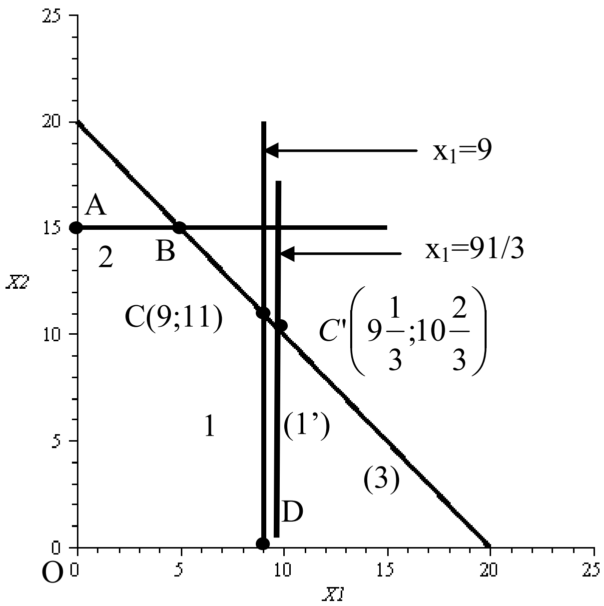


Рис. 2.12. Модифицированное решение задачи
при наличии 1 кг ресурса S1 дополнительно

Целевая функция станет равной:

$$f(C_1) = 2x_1 + x_2 = 2 \cdot \frac{28}{3} + \frac{32}{3} = \frac{88}{3} = \frac{87+1}{3} = 29\frac{1}{3}.$$

Таким образом, получили всё то, что отражено в модифицированной симплекс-таблице.

2. Модифицированные элементы итоговой симплекс-таблицы при наличии 2 кг ресурса S_1 дополнительно представлены в табл. 2.10.

Таблица 2.10

Модифицированные элементы итоговой симплекс-таблицы
при наличии 2 кг ресурса S_1

Базисные переменные	Переменные					Правая часть	Правая часть, модифицированные B
	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	B	9+2/3= $9\frac{2}{3}$
x_1	1	0	1/3*2	0	0	9	8+4/3= $9\frac{1}{3}$
S_2	0	0	2/3*2	1	-2	8	11-2/3= $10\frac{1}{3}$
x_2	0	1	-1/3*2	0	1	11	29+2/3= $29\frac{2}{3}$
Целевая функция f	0	0	1/3*2	0	1	29	9+2/3= $9\frac{2}{3}$

Пояснения те же. Геометрическая интерпретация будет той же самой. Но при этом нам не нужно бесконечно пересчитывать графики, точки и т.д.

Графически (рис. 2.13) это означает, что ограничение $1{-}3x_1 = 27$, $x_1 = 9$ станет $x_1 = 9\frac{2}{3}$. Координаты точки C станут C':

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 20\ , \\ x_1 = \dfrac{29}{3} = 9\dfrac{2}{3}\ , \end{cases}$$

$$C'\left(9\frac{2}{3};\,10\frac{1}{3}\right).$$

То есть $x_1 = \frac{29}{3} = 9\frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{31}{3} = 10\frac{1}{3}$.

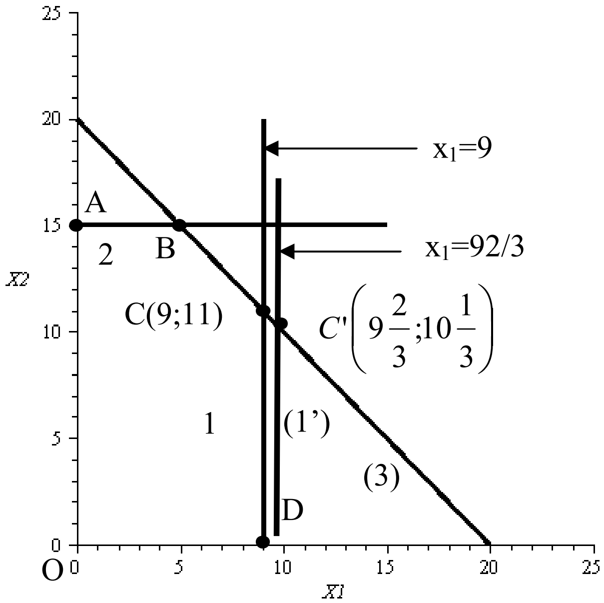


Рис. 2.13. Модифицированное решение задачи при наличии 2 кг ресурса S1 дополнительно

Целевая функция станет равной:

$$f(C_1) = 2x_1 + x_2 = 2\cdot\frac{29}{3} + \frac{31}{3} = \frac{89}{3} = \frac{87+2}{3} = 29\frac{2}{3}.$$

Таким образом, получили то, что отражено в модифицированной симплекс-таблице.

3. Модифицированные элементы итоговой симплекс-таблицы (при увеличении на 5 кг ресурса S3) представлены в табл. 2.11.

Таблица 2.11

Модифицированные элементы итоговой симплекс-таблицы
при увеличении на 5 кг ресурса S_3

Базисные переменные	Теневые цены					План B	Модифицированный план B
	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3		
x_1	1	0	1/3	0	0*5	9	9 + 0 = 9
S_2	0	0	2/3	1	-2*5	8	8 – 10 = -2
x_2	0	1	-1/3	0	1*5	11	11 + 5 = 16
Целевая функция f	0	0	1/3	0	1*5	29	29 + 5 = 34

При этом значение x_1 осталось прежним, x_2 возросло до 16, целевая функция возросла до 34.

Геометрически (рис. 2.14) это означает следующее.

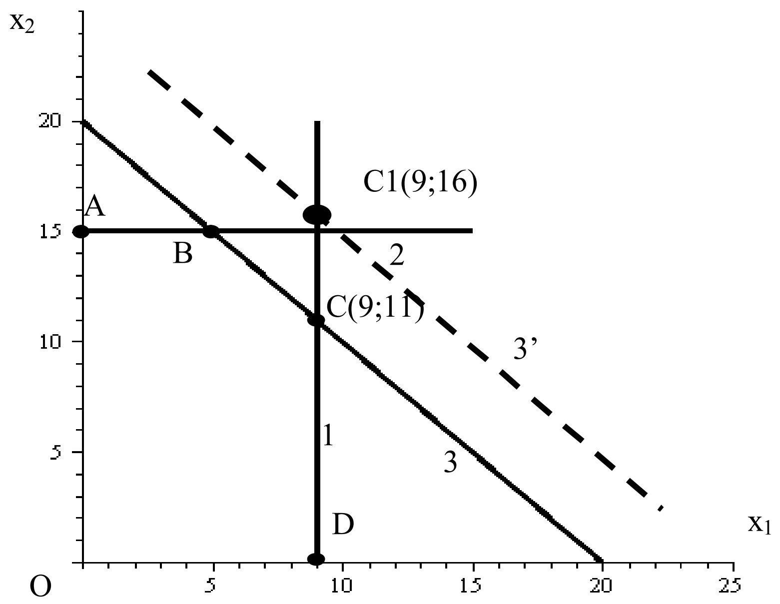


Рис. 2.14. Модифицированное решение задачи
при увеличении на 5 кг ресурса S_3

S_3 – третье ограничение (прямая 3 на рис. 2.13), уравнение которого имеет вид:

$$x_1 + x_2 = 20.$$

При увеличении ресурса S_3 на 5 кг это ограничение примет вид:

$$x_1 + x_2 = 25.$$

Новая точка C_1 будет лежать на пересечении прямых 3’ и 1. Решим систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 25, \\ 3x_1 = 27 \end{cases}.$$

Откуда $C_1(9;16)$, соответственно,

$$f(C_1) = 2x_1 + x_2 = 2 \cdot 9 + 16 = 34.$$

Однако точка C1(9; 16) лежит выше ограничения 2, а это означает, что ресурса 2 будет недостаточно для данного производственного плана.

Все эти данные отражены в симплекс-таблице (табл. 2.12).

Таблица 2.12

Определение максимального дополнительного количества ресурса S_3

Базисные переменные	Теневые цены					План B	Модифицированный план B
	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3		
x_1	1	0	1/3	0	0*r	9	9 + 0 = 9
S_2	0	0	2/3	1	-2*r	8	8 – 2*r = 0
x_2	0	1	-1/3	0	1*r	11	11 + 5 = 16
Целевая функция f	0	0	1/3	0	1*r	29	29 + 5 = 34

4. Определение максимального дополнительного количества ресурса S_3, которое используется полностью и не приводит к созданию излишка ресурса.

Для этого умножим значения столбца S_3 на такой множитель (см. табл. 2.12) *r*, чтобы в правой части модифицированной таблицы ресурс S_2 равнялся нулю:

$$8 + (-2) \cdot r = 0.$$

Отсюда $r = 4$.

Подставив значение $r = 4$, получим данные, представленные в табл. 2.13.

Таблица 2.13

Изменение ресурса S_3

Базисные переменные	Теневые цены					План B	Модифицированный план B
	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3		
x_1	1	0	1/3	0	0*4	9	9 + 0 = 9
S_2	0	0	2/3	1	-2*4	8	8 – 2*4 = 0
x_2	0	1	-1/3	0	1*4	11	11 + 5 = 16
Целевая функция f	0	0	1/3	0	1*4	29	29 + 4 = 33

При этом ограничение 3 будет иметь вид:

$$x_1 + x_2 = 20 + 4 = 24.$$

Геометрически это означает следующее.

Уравнение третьего ограничения стало иметь вид:

$$x_1 + x_2 = 24.$$

Новая точка C_2 (рис. 2.15) будет лежать на пересечении прямой 3” и прямой 1. То есть для нахождения координат точки C_2 надо решить систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 24, \\ 3x_1 = 27. \end{cases}$$

Откуда $C_2(9;15)$ и, соответственно,

$$f(C_2) = 2x_1 + x_2 = 2 \cdot 9 + 15 = 33.$$

Все эти данные отражены в симплекс-таблице (см. табл. 2.13).

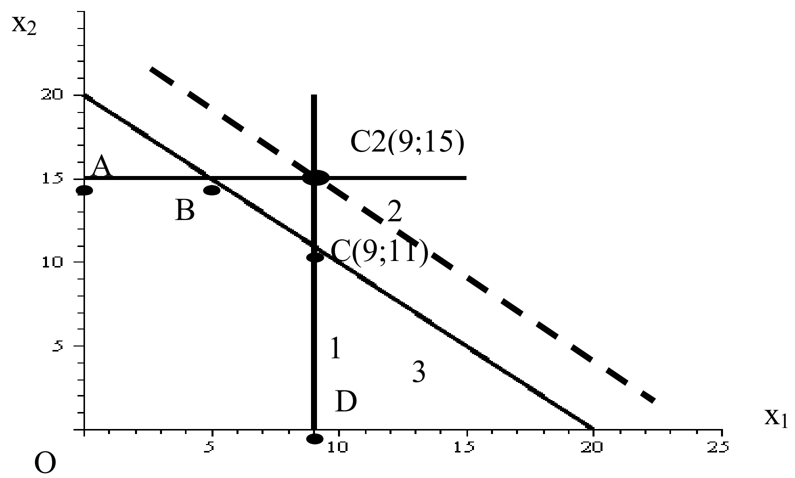


Рис. 2.15. Модифицированное решение задачи при r = 4

5. Модифицированные элементы итоговой симплекс-таблицы при уменьшении на 2 кг ресурса S_1 представлены в табл. 2.14.

Таблица 2.14

Изменение ресурса S_1

Базисные переменные	Теневые цены					План B	Модифицированный план B
	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3		
x_1	1	0	1/3*2	0	0	9	9-2/3=$\frac{27}{3}-\frac{2}{3}=\frac{25}{3}=8\frac{1}{3}$
S_2	0	0	2/3*2	1	-2	8	8-4/3=$\frac{24}{3}-\frac{4}{3}=\frac{20}{3}=6\frac{2}{3}$
x_2	0	1	-1/3*2	0	1	11	11+2/3=$\frac{33}{3}+\frac{2}{3}=\frac{35}{3}=10\frac{2}{3}$
Целевая функция f	0	0	1/3*2	0	1	29	29-2/3=$\frac{87}{3}-\frac{2}{3}=\frac{85}{3}=28\frac{1}{3}$

2.3. Решение ЗЛП в приложении Excel MS Office

Симплекс-метод дает возможность решать ЗЛП с любым числом переменных. При этом можно анализировать чувствительность полученного решения. Однако объем необходимых вычислений резко увеличивается с ростом числа переменных, что ограничивает его применение.

В настоящее время имеются математические программы, которые автоматизируют процесс вычисления симплекс-методом. В частности, такая программа заложена в приложении Excel программы Microsoft Office.

Мощным средством анализа данных Excel является надстройка Solver (Поиск решения). С ее помощью можно определить, в частности, при каких значениях указанных влияющих ячеек формула в целевой ячейке принимает нужное значение (минимальное, максимальное или равное какой-либо величине).

Для процедуры поиска решения можно задать ограничения, причем необязательно использовать те же влияющие ячейки. Для расчета заданного значения применяются различные математические методы поиска. Можно установить режим, при котором полученные значения переменных автоматически заносятся в таблицу. Кроме того, результаты работы программы могут быть оформлены в виде отчета.

Программа «Поиск решений» (в оригинале Excel Solver) дополнительная надстройка табличного процессора MS Excel, которая предназначена для решения определенных систем уравнений, линейных и нелинейных задач оптимизации, используется с 1991 г.

Размер задачи, которую можно решить с помощью базовой версии этой программы, ограничивается такими предельными показателями:

– количество неизвестных (decision variable) – 200;

– количество формульных ограничений (explicit constraint) на неизвестные – 100;

– количество предельных условий (simple constraint) на неизвестные – 400.

Благодаря мировой популярности табличного процессора MS Excel встроенная в его среду программа Solver является наиболее распространенным инструментом для поиска оптимальных решений в сфере современного бизнеса.

По умолчанию в Excel надстройка «Поиск решения» отключена. Чтобы активизировать ее в Excel 2013 необходимо щелкнуть значок «ФАЙЛ» в книге Excel, затем «Параметры» и выбрать категорию «Надстройки». В поле «Надстройки Excel» и нажать кнопку «Перейти». В поле «Доступные надстройки» установить флажок рядом с пунктом «Поиск решения» и нажать кнопку «ОК» (рис. 2.16).

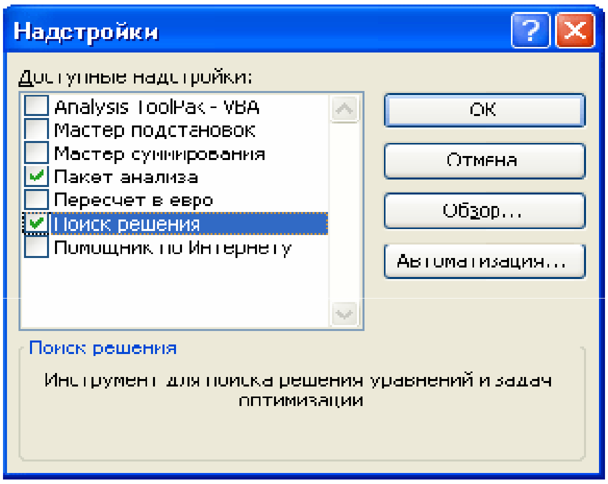


Рис. 2.16. Заключительный этап включения надстройки «Поиск решения» в Office 2003

В Excel 2003 выбрать команду «Сервис/Надстройки», в появившемся диалоговом окне «Надстройки» установить флажок «Поиск решения» и щелкнуть кнопку «ОК». Если вслед за этим на экране появится диалоговое окно с предложением подтвердить Ваши намерения, щелкните на кнопке «Да». (Возможно, понадобится установочный компакт-диск Office).

Процедура поиска решения

1. Предположим, что некоторая фабрика выпускает «Товар А» и «Товар В». На это она тратит «Ресурс 1», «Ресурс 2», «Ресурс 3» и «Ресурс 4». Известны цены товаров и потребности ресурсов для их выпуска. Эти данные заносим в таблицу Excel, как показано на рис. 2.17.

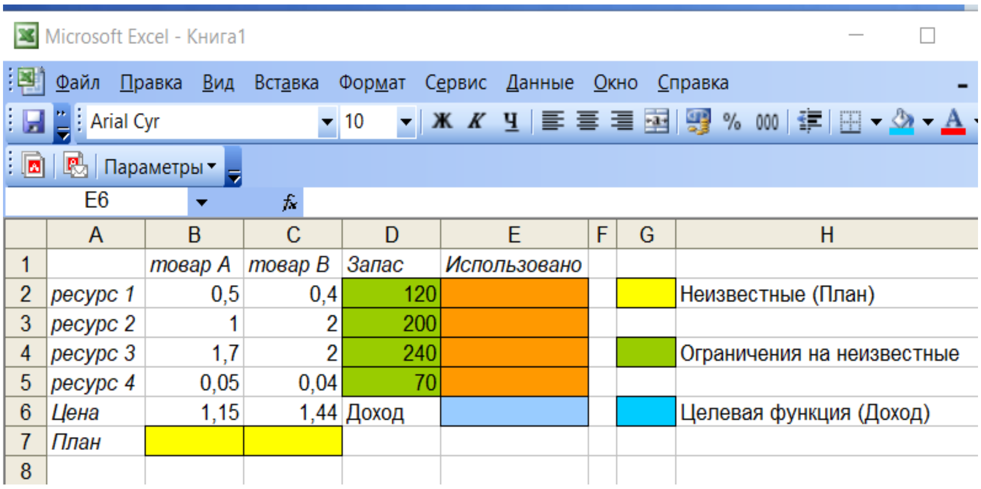


Рис. 2.17. Постановка задачи

2. Выделяем целевую ячейку (в нашем случае E6), которая должна принять необходимое значение и выбираем команду – *fx*. В появившемся меню выбираем команду «СУММПРОИЗВ» и нажимаем «ОК», как показано на рис. 2.18.

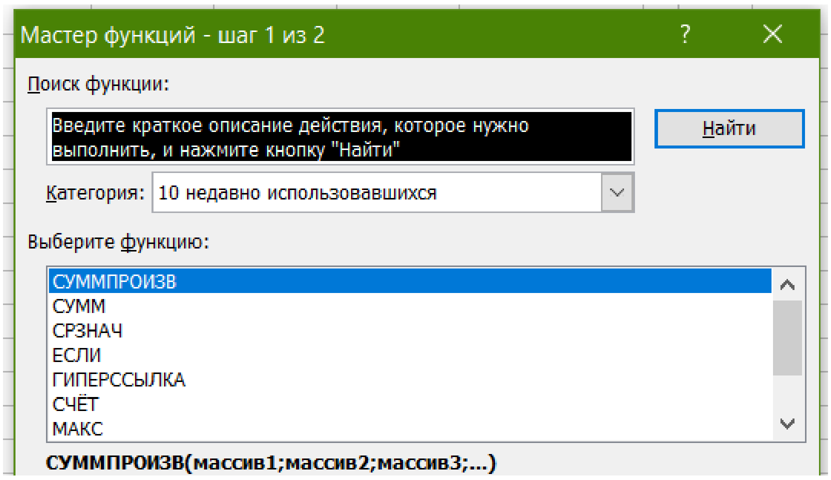


Рис. 2.18. Выбор функции

3. После этого выпадет меню, в котором нужно выбрать перемножаемые массивы. В нашем случае перемножается массив от ячейки B6 до ячейки C6 (цена) на массив от ячейки $B$7 до ячейки $C$7 (план). Знак $ обозначает, что содержимое ячеек будет меняться. Эта процедура показана на рис. 2.19.

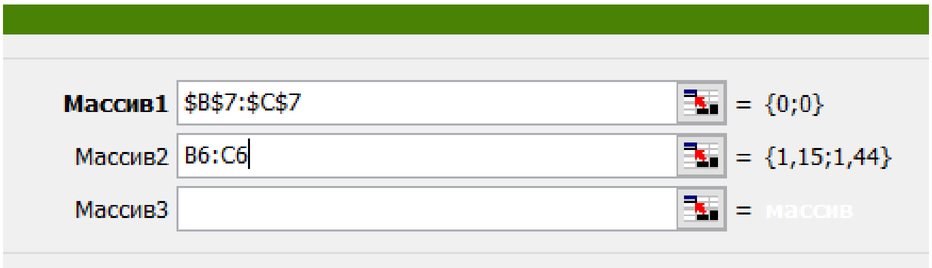
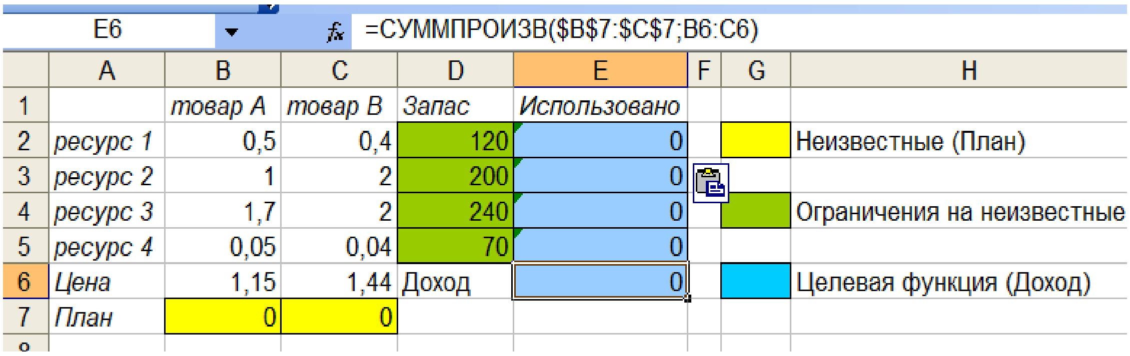


Рис. 2.19. Выбор перемножаемых массивов

4. Нажимаем «ОК». В ячейке E6 (ЦФ) появится «0». Копируем этот «0» и вставляем во все ячейки «Использовано». Обновившаяся таблица в Excel представлена на рис. 2.20.



E6 =СУММПРОИЗВ($B$7:$C$7;B6:C6)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		товар А	товар В	Запас	Использовано			
2	ресурс 1	0,5	0,4	120	0			Неизвестные (План)
3	ресурс 2	1	2	200	0			
4	ресурс 3	1,7	2	240	0			Ограничения на неизвестные
5	ресурс 4	0,05	0,04	70	0			
6	Цена	1,15	1,44	Доход	0			Целевая функция (Доход)
7	План	0	0					

Рис. 2.20. Подготовленная таблица

5. Снова выделяем целевую ячейку (E6), которая должна принять необходимое значение, и выбираем команду: в Excel 2007 Данные/Анализ/Поиск решения; в Excel 2003 Tools > Solver (Сервис > Поиск решения). Поле Set Target Cell (Установите целевую ячейку) открывшегося диалогового окна надстройки Solver (Поиск решения) будет содержать адрес целевой ячейки.

6. Устанавливаем переключатель Equal To (Равной), задающий значение целевой ячейке – Max (максимальное значение, задача на максимум), или Min (минимальное значение, задача на минимум) или Value of (конкретное значение) (рис. 2.21).

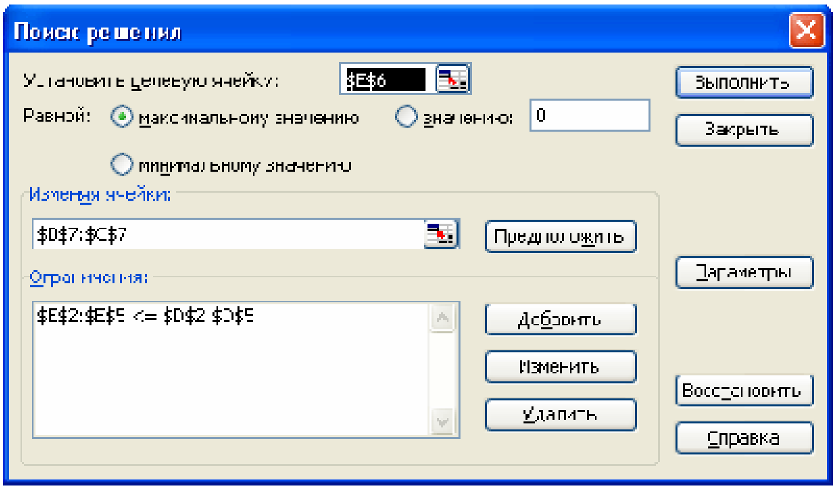


Рис. 2.21. Задание ячеек ЦФ и типа оптимизации

Устанавливаем в поле By Changing Cells (Изменяя ячейки), в каких ячейках программа должна изменять значения в поисках оптимального результата. В нашем случае это массив от ячейки $B$7 до ячейки $C$7. Создаём ограничения в списке Subjekt to the Constraint (ограничения). Для этого щелкаем по кнопке Add (добавить) и в диалоговом окне определяем ограничения. В нашем случае данные столбца E «Использовано» от E2 до E5 не должны превышать данных столбца D «Запас».

7. Щелкаем по кнопке Options (Параметры) и в появившемся окне устанавливаем переключатель «Неотрицательные значения» (если переменные должны быть положительными числами), «Линейная модель», если решаемая задача – линейная, как показано на рис. 2.22.

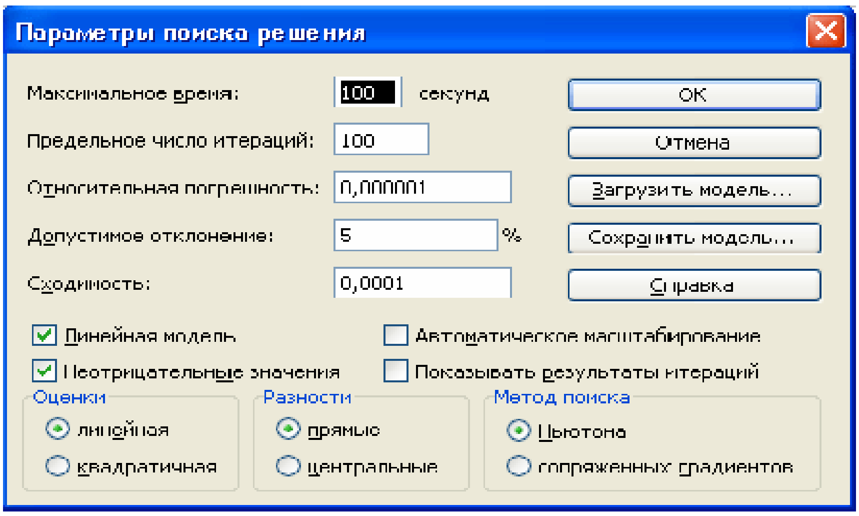


Рис. 2.22. Выбор модели

Щелкаем по кнопке «ОК», запуская процесс счёта.

8. Когда появится диалоговое окно Solver Results (Результаты поиска решения), выбраем переключатель Keep Solve Solution (Сохранить найденное решение) или Restore Original Values (Восстановить исходные значения), а также тип отчёта (рис. 2.23).

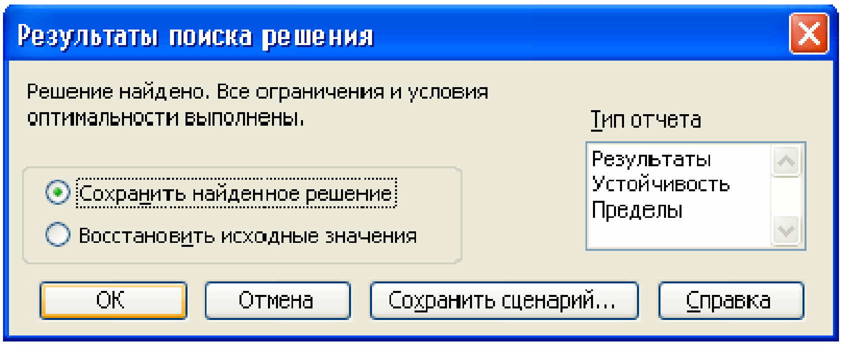


Рис. 2.23. Сохранение решения

9. Нажимаем кнопку «ОК». Практически мгновенно происходит поиск оптимального решения и в таблице мы видим результаты счёта, как показано на рис. 2.24.

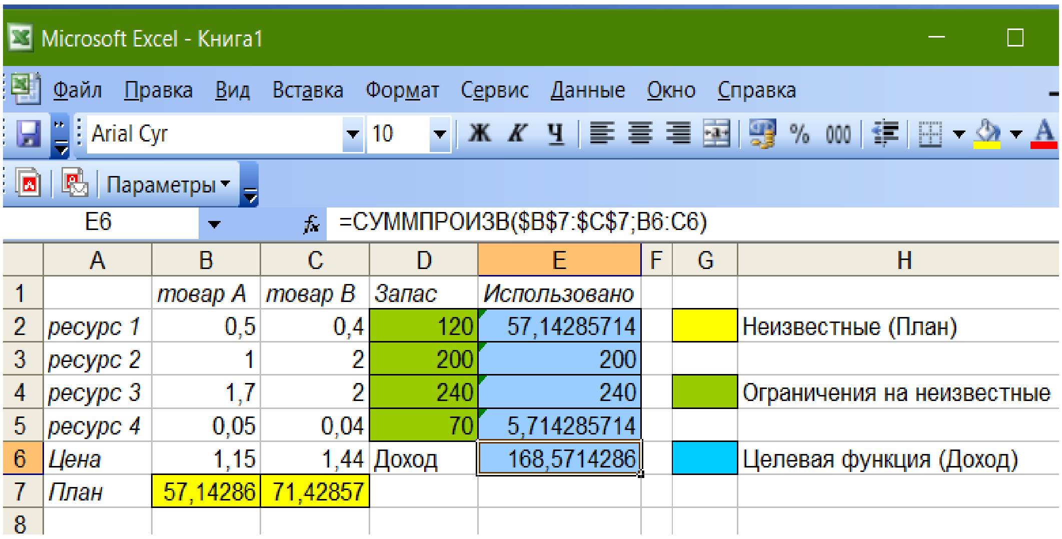


Рис. 2.24. Решение задачи

Максимальное значение ЦФ получается равным 168 условных единиц, при этом надо выпускать 57 единиц товара А и 71 единицу товара В.

Параметры средств «Поиска решений»

Максимальное время – служит для ограничения времени, отпущенного на поиск решения задачи. В этом поле можно ввести время в секундах, не превышающее 32 767 (примерно девять часов); значение

100, используемое по умолчанию, вполне приемлемо для решения большинства простых задач.

Предельное число итераций – управляет временем решения задачи путем ограничения числа вычислительных циклов (итераций).

Относительная погрешность – определяет точность вычислений. Чем меньше значение этого параметра, тем выше точность вычислений.

Допустимое отклонение – предназначено для задания допуска на отклонение от оптимального решения, если множество значений влияющей ячейки ограничено множеством целых чисел. Чем больше значение допуска, тем меньше времени требуется на поиск решения.

Сходимость – применяется только к нелинейным задачам. Когда относительное изменение значения в целевой ячейке за последние пять итераций становится меньше числа, указанного в поле «Сходимость», поиск прекращается.

Линейная модель – служит для ускорения поиска решения путем применения к задаче оптимизации линейной модели. Нелинейные модели предполагают использование нелинейных функций, фактора роста и экспоненциального сглаживания, что замедляет вычисления.

Неотрицательные значения – позволяет установить нулевую нижнюю границу для тех влияющих ячеек, для которых не было задано соответствующее ограничение в диалоговом окне «Добавить ограничение».

Автоматическое масштабирование – используется, когда числа в изменяемых ячейках и в целевой ячейке существенно различаются.

Показывать результаты итераций – приостанавливает поиск решения для просмотра результатов отдельных итераций.

Загрузить модель – после щелчка на этой кнопке открывается одноименное диалоговое окно, в котором можно ввести ссылку на диапазон ячеек, содержащих модель оптимизации.

Сохранить модель – служит для отображения на экране одноименного диалогового окна, в котором можно ввести ссылку на диапазон ячеек, предназначенный для хранения модели оптимизации.

Оценка линейная – переключатель для работы с линейной моделью.

Оценка квадратичная – переключатель для работы с нелинейной моделью.

Разности прямые – используется в большинстве задач, где скорость изменения ограничений относительно невысока. Увеличивает скорость работы средства «Поиск решения».

Разности центральные – используется для функций, имеющих разрывную производную. Данный способ требует больше вычислений, однако его применение может быть оправданным, если выдано сообщение о том, что получить более точное решение не удается.

Метод поиска Ньютона – требует больше памяти, но выполняет меньше итераций, чем в методе сопряженных градиентов.

Метод поиска сопряженных градиентов – реализует метод сопряженных градиентов, для которого требуется меньше памяти, но выполняется больше итераций, чем в методе Ньютона. Данный метод следует использовать, если задача достаточно большая и необходимо экономить память или если итерации дают слишком малое отличие в последовательных приближениях.

Рассмотрим три типа отчёта, создаваемых с помощью приложения Excel.

Первый вид отчёта – отчет по пределам (рис. 2.25) – состоит из двух частей: целевой функции (Целевая ячейка) и плана (Изменяемые ячейки).

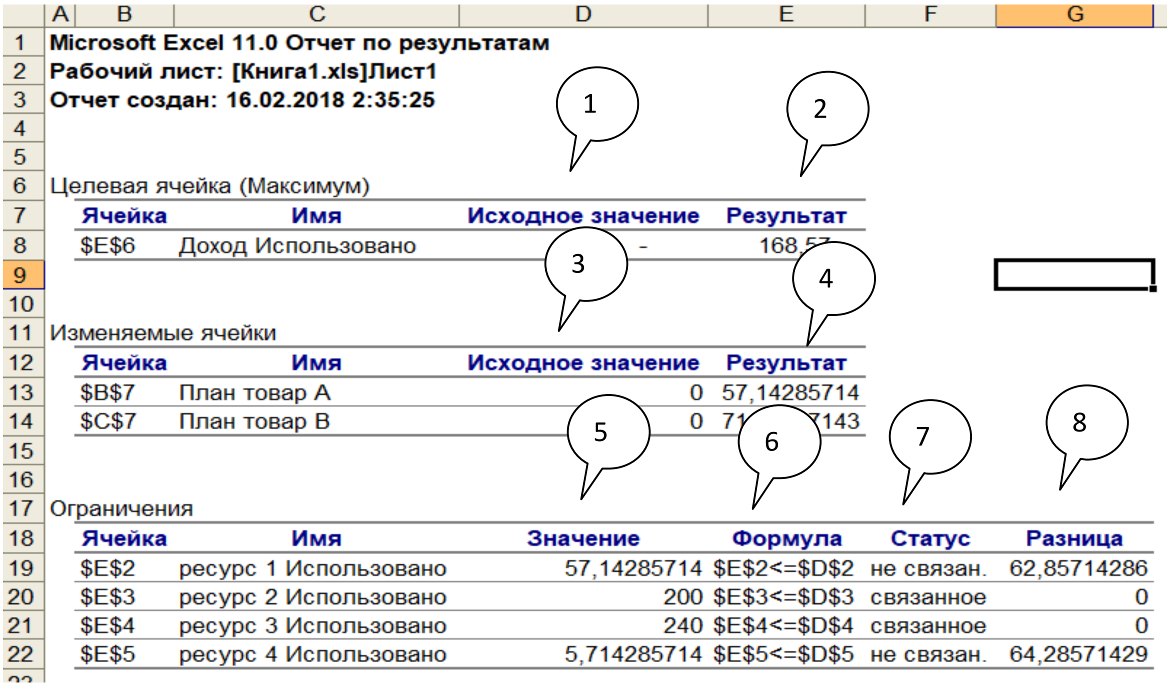

Microsoft Excel 11.0 Отчет по пределам
Рабочий лист: [Книга1.xls]Отчет по пределам 1
Отчет создан: 16.02.2018 2:35:25

Ячейка	Целевое Имя	Значение
$E$6	Доход Использовано	168,57

Ячейка	Изменяемое Имя	Значение	Нижний предел	Целевой результат	Верхний предел	Целевой результат
$B$7	План товар А	57,14285714	0	102,8571429	57,14285714	168,5714286
$C$7	План товар В	71,42857143	0	65,71428571	71,42857143	168,5714286

Рис. 2.25. Отчёт по пределам: 1 – значение ЦФ (Доход); 2 – оптимальный план задачи; 3 – наименьшее значение, которое может принять неизвестное (в нашем случае количество товара А и Б имеет нижний предел ноль, поскольку в параметрах Поиска решений отметили неотрицательные значения); 4 – значение, которое будет в целевой ячейке (Доход), если неизвестное будет равно Нижнему пределу; 5 – наибольшее значение, которое может содержать неизвестные, чтобы получить максимальную ЦФ; 6 – значение, которое будет в целевой ячейке (Доход), если неизвестные будут равны Верхнему пределу

Второй вид отчёта (рис. 2.26) – отчет по результатам – содержит информацию о трех компонентах задачи оптимизации: целевой функции (Целевая ячейка), плана (Изменяемые ячейки) и ограничений (Ограничения).



	A	B	C	D	E	F	G
1	Microsoft Excel 11.0 Отчет по результатам						
2	Рабочий лист: [Книга1.xls]Лист1						
3	Отчет создан: 16.02.2018 2:35:25						
4							
5							
6	Целевая ячейка (Максимум)						
7		Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат		
8		$E$6	Доход Использовано	-	168,5		
9							
10							
11	Изменяемые ячейки						
12		Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат		
13		$B$7	План товар А	0	57,14285714		
14		$C$7	План товар В	0	71 7143		
15							
16							
17	Ограничения						
18		Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
19		$E$2	ресурс 1 Использовано	57,14285714	$E$2<=$D$2	не связан.	62,85714286
20		$E$3	ресурс 2 Использовано	200	$E$3<=$D$3	связанное	0
21		$E$4	ресурс 3 Использовано	240	$E$4<=$D$4	связанное	0
22		$E$5	ресурс 4 Использовано	5,714285714	$E$5<=$D$5	не связан.	64,28571429

Рис. 2.26. Отчёт по результатам: 1 – начальное значение целевой функции при начальном, опорном плане; 2 – максимальное или минимальное значение (в зависимости от задачи) целевой функции (в нашем случае – 168,57 денежных единиц); 3 – начальный опорный план; 4 – оптимальный план задачи. В нашем случае, чтобы получить максимальную выручку в размере 168,37 денежных единиц, нужно производить 57,14 единиц товара А и 71,43 единиц товара Б (понятно, что товар должен быть в целых единицах, но если бы мы задали такой параметр, то не получили отчеты, которые нужны для анализа и улучшения полученных результатов); 5 – показывает количество использованных ресурсов на производство при оптимальном плане; 6 – формулы ограничений; 7 – показывает влияние ограничений на конечный результат. Если статус «связанное», тогда данное ограничение влияет на полученный план, если «не связан» – значит не влияет. В нашем случае ресурс 1 и 4 имеют статус «не связан» – это значит, что эти ресурсы не ограничивают возможности в производстве, что не скажешь про ресурс 2 и 3, которые использованы полностью; 8 – разница между имеющимся в наличии количеством ресурсов и использованных при полученном плане (см. рис. 2.22)

Третий вид отчёта (рис. 2.27) – отчет по устойчивости – состоит из тех же частей, что и отчет по результатам.

Microsoft Excel 11.0 Отчет по устойчивости
Рабочий лист: [Книга1.xls]Лист1
Отчет создан: 16.02.2018 2:35:25

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$B$7	План товар А	57,14285714	0	1,15	0,074	0,43
$C$7	План товар В	71,42857143	0	1,44	0,86	0,087058824

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$E$2	ресурс 1 Использовано	57,14285714	0	120	1E+30	62,85714286
$E$3	ресурс 2 Использовано	200	0,105714286	200	40	58,82352941
$E$4	ресурс 3 Использовано	240	0,614285714	240	100	40
$E$5	ресурс 4 Использовано	5,714285714	0	70	1E+30	64,28571429

Рис. 2.27. Отчёт по устойчивости: 1 – оптимальный план задачи (в нашем случае, чтобы получить максимальную выручку в размере 168,37 денежных единиц, нужно производить 57,14 единиц товара А и 71,43 единиц товара Б); 2 – нормированная стоимость касается неизвестных значений плана. Иначе термин «reduced cost» можно перевести как «цена, которая уменьшает (целевую функцию)». Он показывает, как изменится оптимальное значение целевой функции при выпуске продукции, которой нет в оптимальном плане. Например, если нормированная стоимость товара А была бы 3 (хотя в нашем случае это 0), то принудительный выпуск двух единиц товара А, которых нет в оптимальном плане, привел бы к уменьшению Дохода на 2*3=6 и составлял бы 168,57–6= 162, 57 денежных единиц; 3 – коэффициенты целевой функции; 4, 5 – границы изменений значений коэффициентов целевой функции при условии, что количество оптимальной продукции (план) не изменится. Например, если целевой коэффициент товара А (КА) равен 1,15 (цена за 1 единицу товара), то при изменении его в рамках 1,15–0,43<КА<1,15+0,074>0,72< КА<1,224 план не изменится, но значение дохода может уменьшиться или увеличиться. Это можно проверить, если запустить программу «Поиск решений» после внесений в таблицу изменений данного коэффициента; 6 – количество использованных ресурсов; 7 – теневая цена (в нелинейной модели это множитель Лагранжа) касается ограничений, т. е. определенное значение указывает на «ценность» ограниченного ресурса в сравнении с другими ресурсами. Этот показатель указывает, как изменится оптимальное значение целевой функции (Доход) при изменении запасов ресурсов на 1 единицу. Например, если увеличить запас ресурса 3 на 10 единиц, то доход увеличится на 10*0,61=6,1 и будет составлять 168,57+6,1=174,67 денежных единиц; 8 – запасы ресурсов; 9, 10 – задают диапазон для 8, в котором действует теневая цена 7 (аналогично 4, 5). Например, диапазон ресурса 3: 200<ресурс 3<340. Если ресурс 3 увеличить на 10 единиц, то доход увеличится на 6,1 и будет составлять 174,67. Если этот ресурс увеличить на 110 единиц, то о доходе ничего сказать нельзя, поскольку значение третьего ресурса выйдет за указанные пределы

Для конечного результата оптимизации нужен только отчет по устойчивости плана, поскольку он содержит наиболее существенную информацию.

Рассмотрим еще один пример задачи на поиск оптимального решения с помощью Excel – 2013.

Предположим, перед нами стоит задача оптимизировать работу некоторой фабрики, которая выпускает некоторую продукцию – x1, x2, x3, x4 по цене – 3000, 4000, 3000, 1000 рублей соответственно. Фабрика обладает необходимыми ресурсами – p1, p2, p3. Количество каждого ресурса для иготовления каждого продукта представлено в табл. 2.15.

Таблица 2.15

Ресурсы	x1	x2	x3	x4	Запас
p1	7	2	2	6	80
p2	5	8	4	3	480
p3	2	4	1	8	130
Цена	3000	4000	3000	1000	

На основании этой таблицы, заполняем таблицу в Excel (рис. 2.28).

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		x1	x2	x3	x4	Расход	Запас
3	p1	7	2	2	6		80
4	p2	5	8	4	3		480
5	p3	2	4	1	8		130
6	Цена	3000	4000	3000	1000		
7	План	0	0	0	0		

Рис. 2.28. Исходная таблица в Excel

По сравнению с предыдущей таблицей здесь вставлен ещё один столбец «Расход», куда программа будет заносить израсходованное количество каждого ресурса, и ещё одна строка «План», куда будет заноситься количество выпускаемой продукции. Сейчас здесь ничего нет, поскольку мы ещё не запускали программу.

Для записи значений целевой функции (ЦФ) назначим ячейку F6. Наводим курсор на эту ячейку и нажимаем символ f_x. В выпадающем меню выбираем функцию «СУММПРОИЗВ», как показано на рис. 2.29.

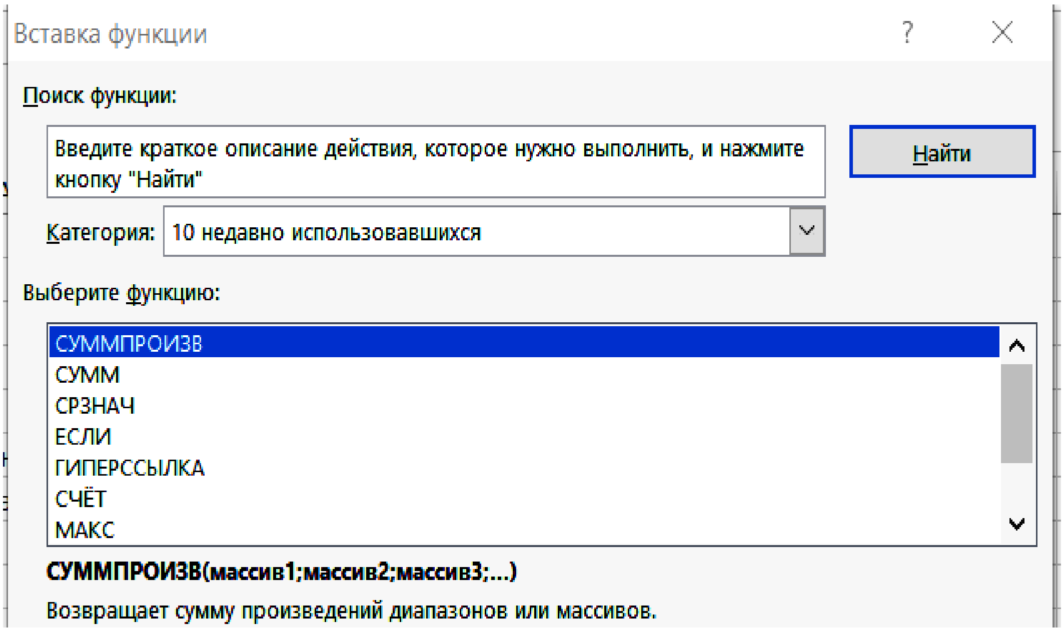


Рис. 2.29. Выбор функции

Нажимаем «ОК» после этого выпадает ещё одно меню, в которое мы записываем перемножаемые массивы, как показано на рис.2.30.

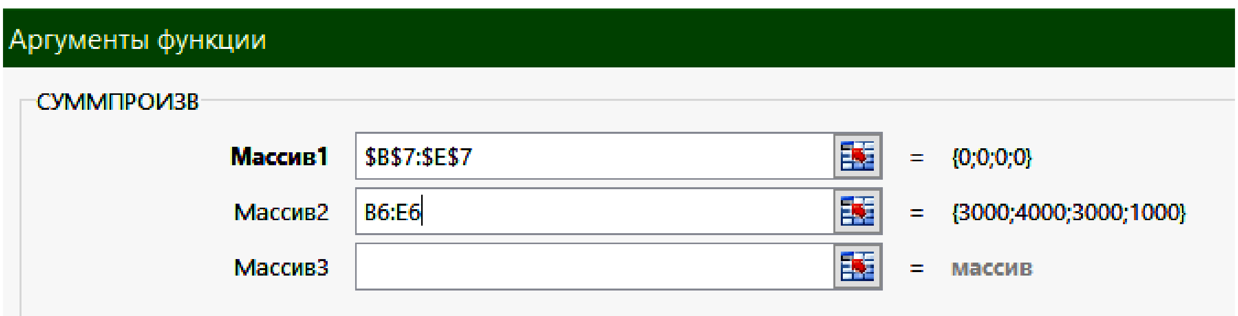


Рис. 2.30. Задания перемножаемых массивов

Здесь символом «$» обозначены ячейки, данные которых будут изменяться в процессе счёта. В нашем случае это строка 7, оптимальный план выпуска изделий. Без этого символа – массив с постоянным значением элементов, в нашем случае это строка 6, цена изделия. Нажимаем «ОК» и в ячейке F6 появляется ноль. Этот ноль мы копируем и вставляем во все клетки графы «Расход».

Теперь надо запустить программу для счета. Для этого наводим курсор на ячейку F6 (ЦФ) и на вкладке «ДАННЫЕ» нажимаем кнопку «Поиск решения».

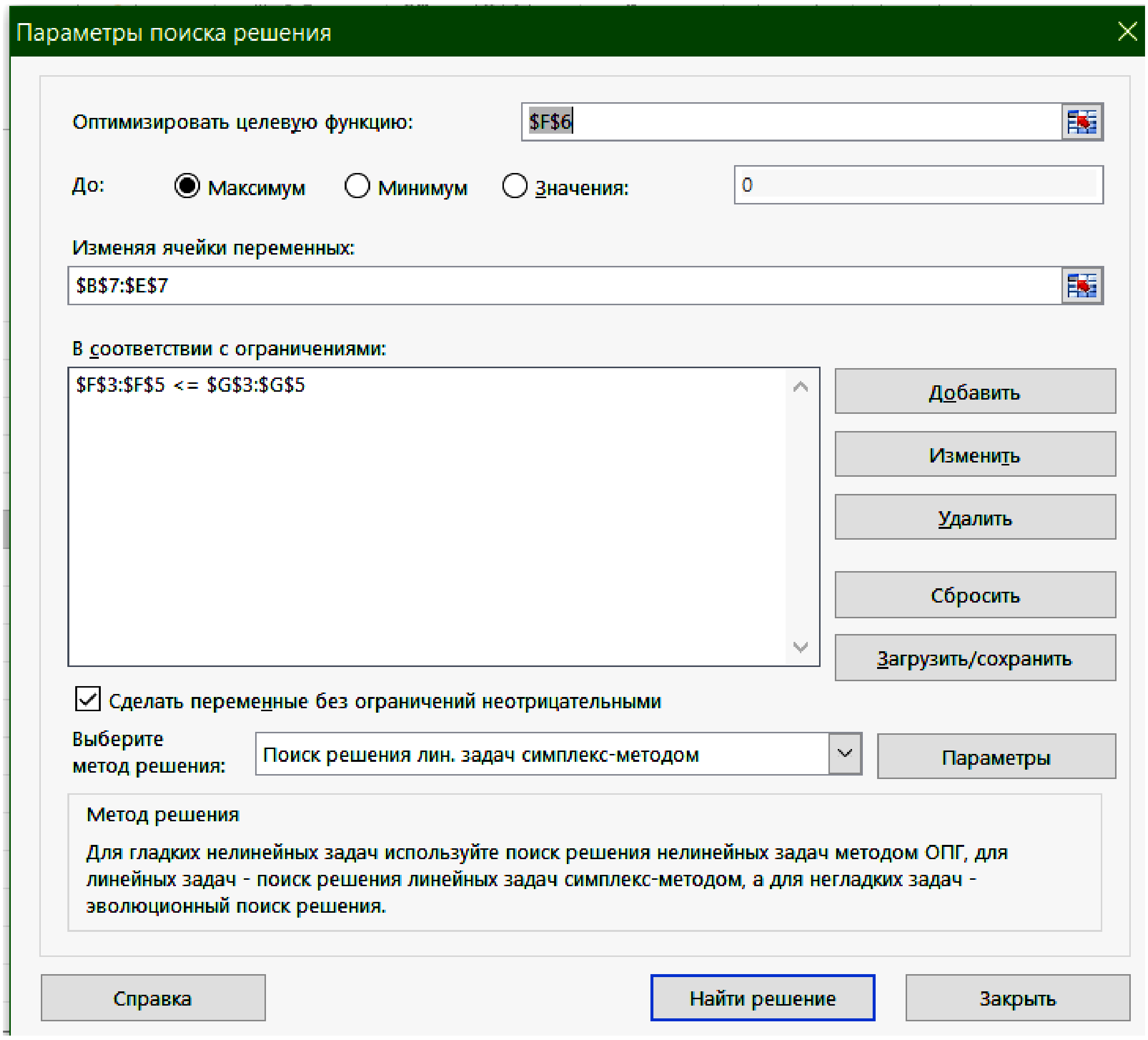


Рис. 2.31. Меню запуска программы

В выпадающем меню (рис. 2.31) назначаем ещё раз ЦФ, переменные ячейки, ограничения (в нашем случае все ячейки столбца F должны быть меньше соответствующих ячеек столбца G), устанавливаем поиск оптимального решения на максимум. После этого нажимаем кнопку «Найти решение».

В выпадающем меню (рис. 2.32) выбираем «сохранить найденное решение» и сохранить отчёты: «Результаты», «Устойчивость» и «Пределы».

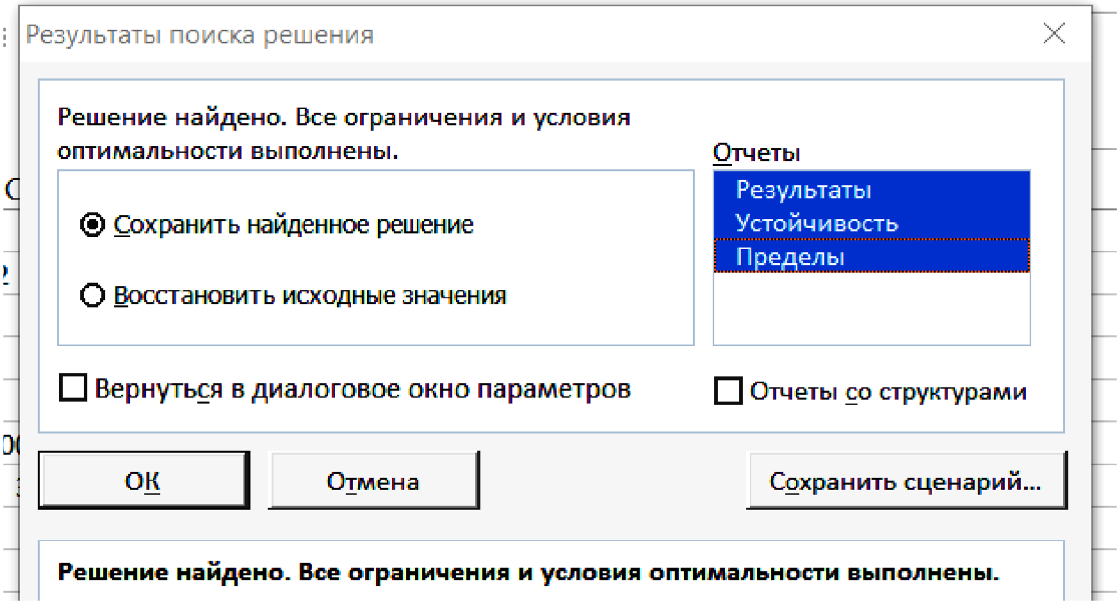


Рис. 2.32. Меню «решение найдено»

Нажимаем «ОК», открывается таблица со всеми заполненными клетками, т.е. найденным оптимальным решением, как показано на рис. 2.33.

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		x1	x2	x3	x4	Расход	Запас
3	p1	7	2	2	6	80	80
4	p2	5	8	4	3	280	480
5	p3	2	4	1	8	130	130
6	Цена	3000	4000	3000	1000	150000	
7	План	0	30	10	0		

Рис. 2.33. Таблица с оптимальным решением

Мы видим, что максимальная выручка при оптимальном плане выпуска товаров будет равна 150000 условных единиц, если выпускать 30 единиц товара «x2» и 10 единиц товара «x3», а товары «x1» и «x4» совсем не выпускать. Отметим, что рассматриваемая программа в Office 2013 несколько беднее функциями, чем программа в Office 2003. При этом отчёты о решении практически одинаковы в обеих программах. Для примера на рис. 2.34 приведён отчёт об устойчивости рассмотренной задачи.

Microsoft Excel 15.0 Отчет об устойчивости

Лист: [Книга1.xlsx]Лист1

Отчет создан: 15.02.2018 18:59:15

Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Приведенн. Стоимость	Целевая функция Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$B$7	План x1	0	-7000	3000	7000	1E+30
$C$7	План x2	30	0	4000	8000	1000
$D$7	План x3	10	0	3000	1000	1750
$E$7	План x4	0	-9666,666667	1000	9666,666667	1E+30

Ограничения

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Тень Цена	Ограничение Правая сторона	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$F$3	p1 Расход	80	1333,333333	80	150	15
$F$4	p2 Расход	280	0	480	1E+30	200
$F$5	p3 Расход	130	333,3333333	130	30	90

Рис. 2.34. Отчёт об устойчивости

Сравнивая данные этого рисунка с данными рис. 2.27, отметим, что в содержательной части разница практически отсутствует.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

Задание 2.1. Решить задачу линейного программирования графическим способом:

$$f(x) = 2x_1 + 3x_2 \quad \rightarrow \quad max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 10 \\ -2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ 2x_1 + 4x_2 \le 8 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Задание 2.2. Составить экономико-математическую модель задачи и решить ее графическим способом. Для производства двух видов изделий А и В предприятие использует два вида сырья. Данные о количестве расхода сырья и его запасы приведены в таблице. Требуется составить такой план выпуска изделий А и В, чтобы прибыль от их реализации была максимальной.

Вид сырья	Норма расхода сырья на одно изделие, кг		Общее количество сырья
	А	В	
I	12	4	300
II	4	4	120
III	3	12	252
Прибыль от реализации одного изделия	30	40	–

Задание 2.3. По данным таблицы составить такой план загрузки станков, чтобы затраты были минимальными. Решить задачу графическим способом.

Тип аппарата	Производительность работы линии, шт.		План
	I	II	
А	5	2	16
В	2	1	7
С	2	7	13
Затраты денежных единиц за одну штуку	1	5	–

Задание 2.4. Для производства столов и шкафов мебельная фабрика использует необходимые ресурсы. Норма затрат на одно изделие данного вида, цены изделий и общее количество имеющихся ресурсов приведены в таблице.

Ресурсы	Норма затрат ресурсов на одно изделие		Общее количество ресурсов
	стол	шкаф	
Древесина, м3			
первый вид	0,2	0,1	40
второй вид	0,1	0,3	45
Трудоемкость, человек. час	1,2	1,5	360
Цена одного изделия, тыс. руб.	6	8	–

1. Считая, что сбыт готовой продукции обеспечен, определить, сколько столов и шкафов следует изготовить фабрике, чтобы доход от их реализации был максимальным.

2. Определить, увеличение запаса каких ресурсов наиболее выгодно для фабрики и почему.

Задание 2.5. Для производства двух сортов мороженого (сливочного и молочного) комбинат использует сахар и сливки. Норма затрат этих продуктов, суточный запас, а также цена реализации по каждому виду мороженого приведены в таблице.

Ресурсы	Норма затрат ресурсов на 1 кг мороженого		Общий запас продуктов
	молочное	сливочное	
Сливки, кг	0,2	0,1	160
Сахар, кг	0,2	0,4	240
Трудоемкость, человек. час	2	3	1800
Цена 1 кг мороженого, руб.	60	75	–

1. Считая, что сбыт мороженого обеспечен, определить, сколько сливочного и молочного мороженого должен выпускать в сутки комбинат, чтобы доход от реализации был максимальным.

2. Определить, увеличение запаса каких продуктов наиболее целесообразно и почему.

Задание 2.6. Для производства карамели двух видов А и В кондитерская фабрика использует сахар и фруктовое пюре. Норма затрат этих продуктов, а также затраты на 1 кг карамели, цена ее реализации и общий запас производственных ресурсов указаны в таблице.

Ресурсы	Норма затрат ресурсов на 1 кг изделия		Общий запас ресурсов
	карамель А	карамель В	
Сахар, кг	0,2	0,6	180
Фруктовое пюре, кг	0,4	0,2	120
Трудоемкость, человек. час	0,4	0,5	180
Цена 1 кг карамели, руб.	45	60	–

Считая, что сбыт обеспечен, определить, сколько карамели А и В надо выпускать фабрике, чтобы доход от реализации был максимальным.

Определить, возможно ли снижение запасов каких-либо ресурсов и на какую величину?

Задание 2.7. Швейная фабрика выпускает юбки и брюки, используя при этом имеющееся оборудование, электроэнергию и ткань. Норма расхода ресурсов на одно изделие, запас этих ресурсов, а также цена готовой продукции приведены в таблице.

Ресурсы	Расход на одно изделие		Суточный запас ресурсов
	юбка	брюки	
Оборудование, человек. час	2	3	600
Электроэнергия, кВт*ч	4	2,5	1000
Ткань, м	1,5	2	900
Цена одного готового изделия, тыс. руб.	1	1,2	–

1. Зная, что суточный спрос на брюки не превышает 150 штук, определить план производства швейной фабрики, обеспечивающий максимальный доход.

2. Какой из используемых ресурсов является наиболее дефицитным и на сколько целесообразно увеличить его запас?

3. Возможно ли снижение суточного запаса ткани? Если да, то на какую величину?

4. Если цена одной юбки снизится до 0,9 тыс. руб., как это повлияет на оптимальное решение?

Задание 2.8. Три станка обрабатывают 2 вида деталей – А и Б. Каждая деталь проходит обработку на всех трех станках. Известны время обработки детали на каждом станке, время работы станков в течение одного цикла производства и цена одной детали каждого вида.

Ресурсы	Время обработкиодной детали, ч		Время работы станка за один цикл производства, ч
	A	B	
I	1	2	16
II	1	1	10
III	3	1	24
Цена одной детали, тыс. руб.	4	6	–

1. Определить план производства деталей А и В, обеспечивающий максимальный доход цеху.

2. Является ли рабочее время второго станка дефицитным ресурсом? Если да, то на какую величину это время нужно увеличить?

3. Определить возможное снижение времени работы станков за один цикл производства.

4. Если цена детали *В* снизится до 5 тыс. руб., как это повлияет на решение?

Задание 2.9. Предприятие располагает ресурсами двух видов в количестве 120 и 80 кг соответственно. Эти ресурсы используются для выпуска продукции двух видов, причем расход на изготовление единицы продукции первого вида составляет 2 кг ресурса первого вида и 2 кг ресурса второго вида. Для производства единицы продукции второго вида требуется 3 кг ресурса первого вида и 1 кг ресурса второго вида. Цена единицы продукции первого вида – 10 тыс. руб., второго вида – 15 тыс. руб. Установлено, что спрос на продукцию первого вида никогда не превышает 22 штук в сутки.

1. Определить план производства продукции обоих видов, обеспечивающий наибольший доход предприятию.

2. Установить, какой из ресурсов наиболее дефицитен и почему.

3. Если спрос на изделие первого вида снизится до 15 штук в сутки, как это повлияет на решение?

4. Если цена изделия второго вида снизится до 8 тыс. руб., как это повлияет на решение?

Задание 2.10. Цех выпускает изделия двух видов: валы и втулки. На производство одного вала рабочий тратит 3 ч, одной втулки – 2 ч. Валы предприятие реализует по цене 80 руб. за штуку, втулки – по цене 60 руб. Известно, что в сутки можно реализовать не более 200 валов и не более 300 втулок.

1. Определить суточную производственную программу цеха, обеспечивающую наибольший доход при условии, что фонд рабочего времени производственных рабочих составляет 900 человек. час.

2. Является ли фонд рабочего времени дефицитным ресурсом?

3. Если спрос на валы увеличится до 300 штук, как это повлияет на решение?

4. В каких пределах может меняться цена одной втулки, чтобы прежнее оптимальное решение сохранилось?

Задание 2.11. Хозяйство располагает следующими производственными ресурсами: площадь пашни составляет 600 га, количество человеко-дней труда – 4000. В таблице приведена информация о данном хозяйстве.

Ресурсы	Культура	
	зерновые	кормовые
Затраты труда, человеко-день	5	10
Урожайность, ц/га	28	36

1. Определить наиболее эффективное сочетание зерновых и кормовых культур при условии, что под кормовые культуры должно быть занято не более 300 га пашни.

2. Являются ли затраты труда дефицитным ресурсом и почему?

3. Если площадь пашни увеличится до 800 га, повлияет ли это на решение?

4. Как должна измениться урожайность зерновых культур, чтобы это повлияло на решение?

Задание 2.12. Фабрика по производству игрушек выпускает куклы и мишки. Для их производства используются поролон и ткань. Норма расхода этих материалов, суточный запас, а также цена готовой продукции приведены в таблице.

Исходные материалы	Норма расхода на готовое изделие		Суточный запас материалов
	кукла	мишка	
Ткань, м	1	1,5	900
Поролон, кг	2	1	800
Ткань одного изделия, руб.	200	300	–

Установлено, что суточный спрос на куклы не превышает 300 штук.

1. Определить план производства фабрики игрушек, обеспечивающий максимальный доход от реализации.

2. Если спрос на куклы возрастет до 350 штук в сутки, как изменится решение и почему?

3. Если суточный запас поролона увеличить до 900 кг, как изменится решение?

4. В каких пределах может колебаться цена одной куклы, чтобы оптимальный план производства остался прежним?

Задание 2.13. Решите задачу симплекс-методом:

$$f(x) = x_1 + 2x_2 \quad \to \quad max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ 5x_1 + 2x_2 \le 10. \\ x_2 \ge 1{,}5 \end{cases}$$

Задание 2.14. Решите задачу симплекс-методом:

$$f(x) = x_1 + 1{,}2x_2 \quad \to \quad max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 600 \\ 4x_1 + 2{,}5x_2 \le 1000. \\ 1{,}5x_1 + 2x_2 \le 900 \end{cases}$$

Задание 2.15. На основе итоговой симплекс-таблицы ответить на вопросы.

Базисные переменные	Теневые цены					План В
	x	y	S1	S2	S3	
x	1	0	1/3	0	0	9
S2	0	0	2/3	1	–2	8
y	0	1	-1/3	0	1	11
Целевая функция P	0	0	1/3	0	1	29

1. Как изменится оптимальное решение задачи сверхнормативного запаса ресурса 1 в количестве 1 кг?

2. Как изменится оптимальное решение задачи сверхнормативного запаса ресурса 1 в количестве 2 кг?

3. Как изменится оптимальное решение задачи сверхнормативного запаса ресурса 3 в количестве 5 кг?

4. Каково максимальное дополнительное количество ресурса 3, которое используется полностью и не приводит к созданию излишка ресурса?

5. Как изменится оптимальное решение задачи при уменьшении запаса ресурса 1 на 2 кг?

Задание 2.16. На основе симплекс-таблицы ответить на вопросы.

1. Как изменится производственный план, доход и остаток избыточного ресурса, если запас первого ресурса увеличить на 2 кг?

2. Что произойдет, если запас первого ресурса увеличить на 5 кг?

3. Определите предельно допустимую величину, на которую можно увеличить запасы первого и второго ресурса, чтобы они не стали избыточным.

Базисные переменные	Теневые цены					План B
	x1	x2	S1	S2	S3	
x2	0	1	1	–1	0	6
x1	1	0	–1	5	0	4
S3	0	0	2	–5	1	6
Целевая ункция	0	0	2	2	0	52

Задание 2.17. Проведите анализ чувствительности итоговой симплекс-таблицы и ответьте на вопросы.

1. Чему равен оптимальный производственный план?

2. Чему будет равен доход при оптимальном производственном плане?

3. Какие ресурсы являются дефицитными?

4. Какой ресурс является избыточным? Каков остаток избыточного ресурса?

5. Как изменится производственный план, доход и остаток избыточного ресурса, если запас второго ресурса увеличится на 3 кг?

6. Какова предельно допустимая величина, на которую можно увеличить запасы второго и третьего ресурсов, чтобы они не стали избыточными.

7. На какую максимальную величину можно уменьшить запас второго ресурса, так, чтобы производственный план остался прежним?

Базисные переменные	Теневые цены					План В
	x1	x2	S1	S2	S3	
S1	0	0	1	–11/3	8/9	84
x1	1	0	0	1/3	–1/9	12
x2	0	1	0	–1/12	1/9	18
Целевая функция	0	0	0	20/3	10/9	1080

Глава 3. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ В ЭКОНОМИКЕ

3.1. Двойственная задача

Рассмотрим основные понятия и выводы специального раздела линейного программирования – теории двойственности. В предыдущей главе было показано, что любую задачу линейного программирования можно записать следующим образом:

$$f\left(\overline{X}\right)=\sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \to \max, \tag{3.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \le b_j;\ i=\overline{1,m}, \tag{3.2}$$

$$x_j \ge 0;\ j=\overline{1,n}. \tag{3.3}$$

С каждой задачей линейного программирования тесно связана другая линейная задача, называемая *двойственной*. Связь исходной и двойственной задач заключается в том, что решение одной из них может быть получено непосредственно из решения другой.

Переменные двойственной задачи y_i называют *объективно обусловленными оценками*, *или двойственными оценками* (*теневые цены*). Модель двойственной задачи имеет вид:

$$g\left(\overline{Y}\right)=\sum_{i=1}^{m} b_i \cdot y_i \to \quad \min, \tag{3.4}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot y_i \ge c_j;\ j=\overline{1,n}, \tag{3.5}$$

$$y_i \ge 0;\ i=\overline{1,m}. \tag{3.6}$$

Каждая из задач двойственной пары является самостоятельной задачей линейного программирования и может быть решена независимо от другой. Однако при определении симплексным методом оптимального плана одной из задач находится решение и другой задачи.

Двойственная задача по отношению к исходной составляется по следующим правилам:

1) целевая функция исходной задачи (3.1)–(3.3) формулируется на максимум, а двойственной (3.4)–(3.6) – на минимум. При этом в исходной задаче все неравенства имеют вид «$\le$», а в задаче на минимум – «$\ge$»;

2) матрица A в системе исходной задачи и аналогичная матрица A^T в двойственной задаче получаются друг из друга транспонированием;

3) число переменных в двойственной задаче равно числу ограничений (3.2) исходной задачи, а число ограничений (3.5) двойственной задачи – числу переменных в исходной задаче;

4) коэффициентами при неизвестных целевой функции двойственной задачи (3.4) являются свободные члены в системе ограничений (3.2) исходной задачи, а правыми частями в ограничениях (3.5) двойственной задачи – коэффициенты при неизвестных в целевой функции (3.1) исходной задачи;

5) каждому ограничению одной задачи соответствует переменная другой задачи: номер переменной совпадает с номером ограничения; при этом ограничению, записанному в виде неравенства «$\leq$», соответствует переменная, связанная условием неотрицательности. Если функциональное ограничение исходной задачи является равенством, то соответствующая переменная двойственной задачи может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Первая теорема двойственности.

Для взаимодвойственных ЗЛП имеет место один из взаимоисключающих случаев:

1. В прямой и двойственной задачах имеются оптимальные решения, при этом значения целевых функций на оптимальных решениях совпадают:

$$\max f\left(\overline{X}\right) = \min g\left(\overline{Y}\right).$$

2. В прямой задаче допустимое множество не пусто, а целевая функция на этом множестве не ограничена сверху. При этом у двойственной задачи будет пустое допустимое множество.

3. В двойственной задаче допустимое множество не пусто, а целевая функция на этом множестве не ограничена снизу. При этом у прямой задачи допустимое множество оказывается пустым.

4. Обе из рассматриваемых задач имеют пустые допустимые множества.

Вторая теорема двойственности (теорема о дополняющей нежесткости).

Пусть $\overline{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ – решение прямой задачи, а $\overline{Y} = (y_1, y_2, ..., y_m)$ – допустимое решение двойственной задачи. Для того чтобы они были оптимальными решениями, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие соотношения:

$$y_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} - b_i\right) = 0; i = \overline{1,m}, \quad (3.7)$$

$$x_j\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j\right) = 0; j = \overline{1,n}. \quad (3.8)$$

Эти условия позволяют, зная оптимальное решение одной из взаимодействующих задач, найти оптимальное решение другой задачи.

Теорема об оценках. Значения переменных y_i в оптимальном решении двойственной задачи представляют собой оценки влияния свободных членов b_i системы ограничений – неравенств прямой задачи на величину $\Delta f(\overline{X})$:

$$\Delta f(\overline{X}) = \Delta b_i y_i \quad (3.9)$$

Решая ЗЛП симплексным методом, мы одновременно решаем двойственную задачу ЗЛП. Значения переменных двойственной задачи y_i в оптимальном плане называют объективно обусловленными или двойственными оценками.

Рассмотрим экономическую интерпретацию двойственной задачи на следующем примере (задача оптимального использования ресурсов).

Пример 3.1.

Пусть для выпуска четырех видов продукции P_1, P_2, P_3, P_4 на предприятии используют три вида сырья S_1, S_2 и S_3. Объемы выделенного сырья, нормы расхода сырья и прибыль на единицу продукции при изготовлении каждого вида продукции приведены в таблице. Требуется определить план выпуска продукции, обеспечивающий наибольшую прибыль. В качестве неизвестных примем объем выпуска продукции j-го вида x_j $(j = 1,2,3,4)$.

Вид сырья	Запасы сырья	Вид продукции			
		P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	35	4	2	2	3
S_2	30	1	1	2	3
S_3	40	3	1	2	1
Прибыль		14	10	14	11

Модель задачи:

$$f(\overline{X}) = 14x_1 + 10x_2 + 14x_3 + 11x_4 \to \max,$$

$$4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 35, \quad (1)$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 30, \quad (2)$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \le 40, \quad (3)$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4.$$

Теперь сформулируем двойственную задачу. Пусть некая организация решила закупить все ресурсы рассматриваемого предприятия. При этом надо установить оптимальную цену на приобретаемые ресурсы y_1, y_2, y_3 исходя из следующих объективных условий:

1) покупающая организация стремится минимизировать общую стоимость ресурсов;

2) за каждый ресурс надо уплатить не менее той стоимости, которую хозяйство может получить при переработке сырья в готовую продукцию.

В результате получим:

$$g(\overline{Y}) = 35y_1 + 30y_2 + 40y_3 \to \min,$$

$$4y_1 + y_2 + 3y_3 \ge 14, \quad (4)$$

$$2y_1 + y_2 + y_3 \ge 10, \quad (5)$$

$$2y_1 + 2y_2 + 2y_3 \ge 14, \quad (6)$$

$$3y_1 + 3y_2 + y_3 \ge 11, \quad (7)$$

$$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0.$$

В результате решения данной задачи в Excel получен оптимальный план:

$$\overline{X} = (0;5;12{,}5;0), \quad f_{\max} = 225, \quad \overline{Y} = (3;4;0), \quad g_{\min} = 225.$$

Найдем решение двойственной задачи без использования Excel.

Подставим в (1), (2) и (3) значения компонент вектора $\overline{X} = (0;5;12,5;0)$:

$$2x_2 + 2x_3 \le 35 \rightarrow 10 + 25 = 35, \quad (8)$$

$$x_2 + 2x_3 \le 30 \quad \rightarrow 5 + 25 = 30, \quad (9)$$

$$x_2 + 2x_3 \le 40 \rightarrow 5 + 25 = 30 < 40. \; (10)$$

Согласно уравнению (10): $5 + 25 < 40$, т.е. $a_{32} + a_{33} < b_3$. Но согласно уравнению (3.7):

$$\text{если} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} < b_i, \quad \text{то} \quad y_i = 0, \quad i = \overline{1,m} \; .$$

Следовательно, $y_3 = 0$. Перепишем (4)–(7):

$$4y_1 + y_2 \ge 14, \qquad (11)$$

$$2y_1 + y_2 \ge 10, \qquad (12)$$

$$2y_1 + 2y_2 \ge 14, \qquad (13)$$

$$3y_1 + 3y_2 \ge 11. \qquad (14)$$

Получили два неизвестных и четыре условия. Система имеет бесконечное множество решений. Но учтём, что $x_1 = 0$ и $x_4 = 0$. Кроме того, согласно уравнению (3.8) должно выполняться условие:

$$\text{если} \quad \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_i > c_j, \quad \text{то} \quad x_j = 0, \; j = \overline{1,n} \; .$$

Таким образом, уравнения (13) и (14) действительно неравенства. Но согласно уравнению (3.8) выполняется условие:

$$\text{если}\; x_i > 0, \quad \text{то} \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j = c_j, \; j = \overline{1,n} \; .$$

Следовательно, уравнения (12) и (13) представляют собой равенства:

$$2y_1 + y_2 = 10,$$

$$2y_1 + 2y_2 = 14.$$

Отсюда находим, что $y_1 = 3$, $y_2 = 4$, т. е. вектор $\overline{Y} = (3;\, 4;\, 0)$, что совпадает с Excel.

Итак, ресурс S_3, согласно уравнению (10), не используется полностью. Он не дефицитен. Ресурсы S_1 и S_2 используются полностью в данном плане производства. Они дефицитны. Далее $x_1 = 0$ и $x_4 = 0$, т.е. x_1 и x_2 не вошли в план, следовательно, продукция P_1 и P_4 убыточна. Продукция P_2 и P_3 не убыточна, она вошла в оптимальный план.

Экономический смысл первой теоремы двойственности следующий. План производства X и набор оценок ресурсов Y оказываются оптимальными тогда и только тогда, когда прибыль от реализации продукции, определенная при известных заранее ценах продукции $c_1, c_2, ..., c_n$, равна затратам на ресурсы по «внутренним, теневым» (определяемым только из решения задачи) ценам ресурсов $y_1, y_2, ..., y_m$. Для всех же других планов $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ обеих задач прибыль от реализации продукции всегда меньше (или равна) стоимости затраченных ресурсов: $f(\overline{X}) \le g(\overline{Y})$, т.е. ценность всей выпущенной продукции не превосходит суммарной оценки имеющихся ресурсов. Значит, величина $g(\overline{Y}) - f(\overline{X})$ характеризует производственные потери в зависимости от рассматриваемой производственной программы и выбранных оценок ресурсов.

При оптимальной производственной программе и векторе оценок ресурсов производственные потери равны нулю.

Экономический смысл первой теоремы двойственности можно интерпретировать и так: предприятию безразлично, производить ли *продукцию* по оптимальному плану $\overline{X}$ и получить максимальную прибыль либо продать ресурсы по оптимальным ценам $\overline{Y}$ и возместить от продажи равные ей максимальные затраты на ресурсы.

Из второй теоремы двойственности (уравнения (3.7), (3.8)) в данном случае следуют следующие требования на оптимальную производственную программу $\overline{X} = (x_1, x_2, .., x_n)$ и оптимальный вектор оценок $\overline{Y} = (y_1, y_2, ..., y_m)$.

Из уравнения (3.7) вытекает:

$$\begin{aligned} &\text{если } y_i > 0, \quad \text{то} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = b_i, i = \overline{1,m}; \\ &\text{если} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j < b_i, \quad \text{то} \quad y_i = 0, i = \overline{1,m}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

А из уравнения (3.8):

$$\begin{aligned} &если\ x_i > 0, \quad то \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j = c_j,\ j = \overline{1,n}; \\ &если \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_i > c_j, \quad то \quad x_j = 0,\ j = \overline{1,n}\ . \end{aligned} \tag{3.11}$$

Условие (3.10) можно интерпретировать так: если оценка y_i единицы ресурса i-го вида положительна, то при оптимальной производственной программе этот ресурс используется полностью; если же ресурс используется не полностью, то его оценка равна нулю.

Из условия (3.11) следует, что если j-й вид продукции вошел в оптимальный план, то он в оптимальных оценках не убыточен; если же j-й вид продукции убыточен, то он не войдет в план, не будет выпускаться.

Кроме того, если даны плановые задания по выпуску продукции – прямые ограничения – то условие (3.10) для этих ограничений записывается в виде:

$$\begin{aligned} &если \quad \mathrm{x_j} > T_j,\ \ то\ y_{m+j} = 0\ , \\ &если \quad y_{m+j} < 0,\ \ то\ \mathrm{x_j} = T_j\ , \end{aligned} \tag{3.12}$$

где T_j – плановое задание по выпуску продукции j-го вида.

Кроме нахождения оптимального решения должно быть обеспечено получение дополнительной информации о возможных изменениях решения при изменении параметров системы.

Эту часть исследований обычно называют анализом модели на чувствительность.

Экономико-математический анализ решений осуществляется в двух направлениях:

1) в виде вариантных расчетов по моделям с составлением различных вариантов плана;

2) в виде анализа каждого из полученных решений с помощью двойственных оценок.

Одно из эффективных средств экономико-математического анализа – использование объективно обусловленных оценок оптимального плана. Такого рода анализ базируется на свойствах двойственных оценок.

Перейдем к рассмотрению конкретных экономических свойств оценок y_i оптимального плана. Сначала перечислим эти свойства, а потом проиллюстрируем их конкретными примерами.

Свойство 1. Оценки как мера дефицитности ресурсов и продукции.

Свойство 2. Оценки как мера влияния ограничений на функционал.

Свойство 3. Оценки как инструмент определения эффективности отдельных вариантов.

Свойство 4. Оценки как инструмент балансирования суммарных затрат и результатов.

Пример 3.2. Задача о планировании выпуска тканей.

Пусть некоторая фабрика выпускает три вида тканей, причем суточное плановое задание составляет не менее 90 м тканей первого вида, 70 м – второго и 60 м – третьего. Суточные ресурсы следующие: 780 единиц производственного оборудования, 850 единиц сырья и 790 единиц электроэнергии, расход которых на один метр ткани представлен в таблице.

Ресурсы	Ткани		
	I	II	III
Оборудование	2	3	4
Сырье	1	4	5
Электроэнергия	3	4	2

Цена за один метр ткани вида I равна 80 денежным единицам, II – 70 денежным единицам, III – 60 денежным единицам.

Необходимо определить, сколько метров ткани каждого вида следует выпустить, чтобы общая стоимость выпускаемой продукции была максимальной.

Введем обозначения:

x_1 – количество метров ткани вида I;

x_2 – количество метров ткани вида II;

x_3 – количество метров ткани вида III.

$$f(\overline{X}) = 80x_1 + 70x_2 + 60x_3 \to \max$$

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le 780 \\ (2) & x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 850 \\ (3) & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 790 \end{array}\right\} \text{ ограничения по ресурсам,}$$

$$\left.\begin{array}{ll} (4) & 0 \ge x_1 \ge 90 \\ (5) & 0 \ge x_2 \ge 70 \\ (6) & 0 \ge x_3 \ge 60 \end{array}\right\} \qquad \text{плановое задание.}$$

В результате решения задачи симплексным методом получен следующий оптимальный план: $f_{\max}(\overline{X}) = 19075$, $\overline{X} = (112{,}5;\, 70;\, 86{,}25)$. Решение в Excel также дает: $f_{\max}(\overline{X}) = 19075$, $\overline{X} = (112{,}5;\, 70;\, 86{,}25)$.

Двойственная задача.

Сама модель двойственной задачи имеет вид:

$$g(\overline{Y}) = 780y_1 + 850y_2 + 790y_3 + 90y_4 + 70y_5 + 60y_6 \to min.$$

Для правильной записи ограничений двойственной задачи уравнения (1)–(6) перепишем в виде

$$\begin{array}{llll} y_1 & \to & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le 780\ , & (1) \\ y_2 & \to & x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 850\ , & (2) \\ y_3 & \to & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 790\ , & (3) \\ y_4 & \to & x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 \ge 90\ , & (4) \\ y_5 & \to & 0 \cdot x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 \ge 70\ , & (5) \\ y_6 & \to & 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + x_3 \ge 60\ , & (6) \end{array}$$

где y_1 – двойственная оценка ресурса «оборудование»; y_2 – двойственная оценка ресурса «сырье»; y_3 – двойственная оценка ресурса «электроэнергия»; y_4 – двойственная оценка ткани вида I; y_5 – двойственная оценка ткани вида II; y_6 – двойственная оценка ткани вида III.

Теперь уже спокойно можно записать ограничения для двойственной задачи:

$$2y_1 + y_2 + 3y_3 + y_4 \ge 80\ , \qquad (7)$$

$$3y_1 + 4y_2 + 4y_3 + y_5 \ge 70\ , \qquad (8)$$

$$4y_1+5y_2+2y_3+y_6\ge 60, \qquad (9)$$
$$y_{1,2,3}\ge 0,\ y_{4,5,6}\le 0 \ .$$

С помощью Excel можно получить следующий результат:
$$(\overline{Y})=(2{,}5;\ 0;\ 25;\ 0;-37{,}5;\ 0),\ g_{\min}(\overline{Y})=19075.$$

Но можно получить эти значения и без Excel.

Действительно, подставим найденный вектор $\overline{X}=(112{,}5;\ 70;\ 86{,}25)$ в систему ограничений (1)–(6):
$$2x_1+3x_2+4x_3\le 780\to 225+210+345=780, \qquad (10)$$
$$x_1+4x_2+5x_3\le 850\to 112{,}5+280+431{,}25=823{,}75<850, \qquad (11)$$
$$3x_1+4x_2+2x_3\le 790\to 337{,}5+280+172{,}5=790, \qquad (12)$$
$$x_1\ge 90 \quad\to\quad 112{,}5>90, \qquad (13)$$
$$x_2\ge 70 \quad\to\quad 70=70, \qquad (14)$$
$$x_3\ge 60 \quad\to\quad 86{,}25>60. \qquad (15)$$

Сопоставляя уравнение (11) и второе уравнение (3.10), приходим к выводу, что $y_2=0$. Сопоставляя уравнения (13) и (15) с первым уравнением (3.12), приходим к выводу, что $y_4=0$ и $y_6=0$. Поскольку в первом уравнении $j=1$, отсюда $j_{m+1}=j_{3+1}=y_4$. Далее, если $j=3$, то $j_{m+3}=j_{3+3}=y_6$. Остается найти y_1, y_3 и y_5.

Согласно первому уравнению (3.11), все неравенства системы ограничений (7)–(9) превращаются в систему равенств, для нахождения y_1, y_3 и y_5:
$$2y_1+3y_3=80\ , \qquad (16)$$
$$3y_1+4y_3+y_5=70, \qquad (17)$$
$$4y_1+2y_3=60. \qquad (18)$$

Решая ее, находим: $y_1=2{,}5$, $y_3=25$ и $y_5=-37{,}5$. То есть вектор равен $(\overline{Y})=(2{,}5;\ 0;\ 25;\ 0;-37{,}5;\ 0)$, что совпадает с Excel.

Одновременно выясняем, что согласно ограничению (11) ресурс «сырье» используется не полностью, имеется остаток $-\ 26{,}25$. То есть этот ресурс не является дефицитным, и можно попытаться увеличить прибыль за счет этого ресурса. Согласно уравнениям (10) и (12), ресурсы «оборудование» и «электроэнергия» используются полностью и являются дефицитными. Именно они ограничивают целевую функцию.

Согласно уравнению (14), план по ткани типа II выполняется. Согласно уравнениям (13) и (15), план по тканям типа I и III – перевыполняется.

Мы видим также, что $f_{\max}(\overline{X}) = g_{\min}(\overline{Y})$, следовательно, план выпуска тканей и соответствующая ему система оценок ресурсов и продукции оптимальны.

Итак, получили:

$y_1 = 2{,}5$ – двойственная оценка ресурса «оборудование»;

$y_2 = 0$ – двойственная оценка ресурса «сырье»;

$y_3 = 25$ – двойственная оценка ресурса «электроэнергия»;

$y_4 = 0$ – двойственная оценка ткани вида I;

$y_5 = -37{,}5$ – двойственная оценка ткани вида II;

$y_6 = 0$ – двойственная оценка ткани вида III.

Приведем экономическое истолкование этих оценок, которое представляет собой интерпретацию их общих экономико-математических свойств, применительно к конкретному содержанию задачи.

По условию второго уравнения (3.10) не использованный полностью в оптимальном плане ресурс получает нулевую оценку. Нулевая оценка ресурса свидетельствует о его недефицитности. Ресурс недефицитен не из-за его неограниченных запасов (они ограничены величиной b_i), а из-за невозможности его полного использования в оптимальном плане.

Поскольку суммарный расход недефицитного ресурса меньше его общего количества, то план производства им не лимитируется. Данный ресурс не препятствует и дальше максимизировать целевую функцию $f(\overline{X})$.

Ограничивают целевую функцию дефицитные ресурсы, в данной задаче – оборудование и электроэнергия. Они полностью использованы в оптимальном плане. По условию первого уравнения (3.10) оценка таких ресурсов положительна ($y_1 = 2{,}5$, $y_3 = 25$). Действительно, ограничение по оборудованию имеет вид:

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le 780.$$

Подставив найденные значения $\overline{X} = (112{,}5;\, 70;\, 86{,}25)$, получим:

$$2 \cdot 112{,}5 + 3 \cdot 70 + 4 \cdot 86{,}25 = 780 \le 780,$$

т. е. ресурс расходуется полностью и его оценка положительна $y_1 = 2{,}5$.

Ограничение по сырью имеет вид

$$x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 850.$$

Подставив найденные значения $\overline{X} = (112{,}5;\, 70;\, 86{,}25)$, получим:

$$112{,}5 + 4 \cdot 70 + 5 \cdot 86{,}25 = 823{,}75 \le 850,$$

т. е. ресурс расходуется неполностью и его оценка нулевая: $y_2 = 0$.

Ограничение по электроэнергии имеет вид:

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 790.$$

Подставив найденные значения $\overline{X} = (112{,}5;\, 70;\, 86{,}25)$, получим:

$$3 \cdot 112{,}5 + 4 \cdot 70 + 2 \cdot 86{,}25 = 790 \le 790,$$

т.е. ресурс расходуется полностью и его оценка положительна $y_3 = 25$.

Рассмотрим теперь понятие дефицитности продукции. Напомним, что продукцию оценивают параметры y_3, y_4 и y_5. Их система неравенств имеет вид (7)–(9). Или, подставив значения вектора $(\overline{Y}) = (2{,}5;\, 0;\, 25;\, 0; -37{,}5;\, 0)$, найдем:

$$2y_1 + 3y_3 \ge 80 \quad \to \quad 5 + 75 = 80, \qquad (19)$$

$$3y_1 + 4y_3 + y_5 \ge 70 \quad \to \quad 7{,}5 + 100 - 37{,}5 = 70, \qquad (20)$$

$$4y_1 + 2y_3 \ge 60 \quad \to \quad 10 + 50 = 60. \qquad (21)$$

По условию первого уравнения (3.12) нулевую оценку ($y_4 = 0$, $y_6 = 0$) получает продукция, задания по выпуску которой в оптимальном плане перевыполняются (если $x_j > T$, то $y_{m+j} = 0$; если $y_{m+j} < 0$, то $x_j = T$).

Очевидно, перевыполнение плана целесообразно по выгодной продукции (ткани I и III видов), т.е. такой, производство которой способствует достижению максимума критерия оптимальности. Размеры производства такой выгодной продукции определяются не величиной задания на выпуск (T_j) (в оптимальном плане они перекрыты), а ограниченностью дефицитных ресурсов. Эту продукцию выпускают как можно больше, пока хватит ресурсов.

Выпуск выгодной продукции ограничивается не только фактом ограниченности дефицитных ресурсов, но и тем, что часть дефицитных ресурсов требуется выделить на обеспечение выпуска невыгодной продукции в соответствии с плановыми заданиями. По условию второго уравнения (3.12) отрицательную оценку ($y_5 = -37{,}5$) получает продукция, задания по выпуску которой не перевыполняются. И так как по условию задачи ($x_j \geq T_j$) плановые задания должны быть обязательно выполнены, то продукция делится на выгодную (виды I и III ткани) и невыгодную (вид II ткани).

Если в ограничение двойственной задачи, относящееся к II виду ткани:

$$3y_1 + 4y_2 + 4y_3 + y_5 \geq 70,$$

подставить полученные значения двойственных оценок, то получаем

$$3 \cdot 2{,}5 + 4 \cdot 0 + 4 \cdot 25 - 37{,}5 = 70,$$

$$107{,}5 - 37{,}5 = 70,$$

т.е. стоимость ресурсов, затраченных на один метр ткани вида II, составляет $107{,}5$ денежной единицы и это на $37{,}5$ денежной единицы больше цены одного метра ткани этого вида. Ведь $-37{,}5$ – это y_5, а это – оценка ткани вида II. Таким образом, вид ткани II убыточен для фабрики: на каждом выпущенном метре ткани этого вида фабрика теряет $37{,}5$ денежной единицы.

В соответствии с критерием оптимальности плана, в зависимости от того, перевыполняется план выпуска или нет, выпуск ткани вида II поглощает часть дефицитных ресурсов, чем сдерживает рост выпуска выгодной продукции, а тем самым и рост целевой функции.

Оценка ресурса показывает, насколько изменится критерий оптимальности при изменении количества данного ресурса на единицу. Для недефицитного ресурса оценка равна нулю, поэтому изменение его величины не повлияет на критерий оптимальности. Дефицитность ресурса измеряется вкладом единицы ресурса в изменение целевой функции.

Влияние ограничений по выпуску продукции на критерий оптимальности противоположно влиянию ограничений по ресурсам. Если продукция невыгодна (вид II ткани, $y_5 = -37{,}5$), то увеличение плановых заданий по ее выпуску ведет к уменьшению выпуска выгодной продукции и ухудшает план. Наоборот, уменьшение плановых заданий по невыгодной продукции позволяет снизить ее выпуск, перебросить сэкономленные ресурсы на дополнительный сверхплановый выпуск выгодных видов продукции, что увеличивает значение целевой функции. Изменение плановых заданий по выгодной продукции не изменяет значение целевой функции.

Перейдем к анализу модели на чувствительность.

Пример 3.3.

На основании информации, приведенной в таблице, составить план производства, максимизирующий объем прибыли.

Таблица А

Ресурсы	Затраты ресурсов на единицу продукции		Наличие ресурсов
	А	Б	
Труд	2	4	2000
Сырье	4	1	1400
Оборудование	2	1	800
Прибыль на единицу продукции	40	60	

Экономико-математическая модель будет иметь вид:

$$f(\overline{X}) = 40x_1 + 60x_2 \to \max,$$

$$2x_1 + 4x_2 \le 2000, \qquad (1)$$

$$4x_1 + x_2 \le 1400, \qquad (2)$$

$$2x_1 + x_2 \le 800, \qquad (3)$$

$$x_{1,2} \ge 0.$$

С помощью Excel можно получить следующий результат:

$$\overline{X} = (200;\, 400),\ f_{\max} = 32000.$$

Двойственная задача имеет вид:

$$g(\overline{Y}) = 2000y_1 + 1400y_2 + 800y_3 \to \min,$$

$$2y_1 + 4y_2 + 2y_3 \geq 40, \qquad (4)$$

$$4y_1 + y_2 + y_3 \geq 60, \qquad (5)$$

$$y_{1,2,3} \geq 0, \qquad (6)$$

где y_1 – оценка ресурса «труд»; y_2 – оценка ресурса «сырье»; y_3 – оценка ресурса «оборудование».

С помощью Excel можно получить следующий результат:

$$\overline{Y} = (13{,}3(3);\ 0;\ 6{,}6(6)),\ g_{\min} = 32000,\ \overline{Y} = \left(\frac{40}{3};\, 0;\, \frac{20}{3}\right).$$

Выявим чувствительность оптимального плана к определенным изменениям исходной модели.

1. Увеличение объемов какого вида ресурсов наиболее выгодно?

2. На сколько можно увеличить запас сырья для улучшения полученного оптимального значения целевой функции?

3. Каков диапазон изменения того или иного коэффициента целевой функции, при котором не происходит изменения оптимального решения?

4. Целесообразность включения в план новых изделий.

1. Ценность ресурсов.

В примере объективно обусловленные оценки ресурса «труд» равны 40/3 ($y_1 = \frac{40}{3}$); «сырье» – 0 ($y_2 = 0$); «оборудование» – 20/3 ($y_3 = \frac{20}{3}$). Дефицитный ресурс, полностью используемый при оптимальном плане (для которого $\sum a_{ij}x_j = b_i$), имеет положительную оценку ($y_i > 0$). В примере «сырье» не является дефицитным ресурсом. Действительно, перепишем ограничение по сырью – уравнение (2):

$$4x_1 + x_2 \leq 1400; \to 4 \cdot 200 + 400 = 1200 < 1400 = b_2, \quad (7)$$

$$y_2 = 0.$$

«Труд» и «оборудование» – дефицитные ресурсы:

$$2x_1 + 4x_2 \le 2000; \to 2 \cdot 200 + 4 \cdot 400 = 2000 = b_1, \quad (8)$$

$$y_1 = \frac{40}{3},$$

$$2x_1 + x_2 \le 800; \to 2 \cdot 200 + 400 = 800 = b_3, \quad (9)$$

$$y_3 = \frac{20}{3}.$$

Чем выше величина оценки y_i, тем острее дефицитность i-го ресурса.

В примере «труд» ($y_1 = \frac{40}{3}$) более дефицитен, чем «оборудование» 3 ($y_3 = \frac{20}{3}$). Поэтому наиболее выгодно увеличение ресурсов труда.

Необходимо иметь в виду, что ценность различных видов сырья нельзя отождествлять с действительными ценами, по которым осуществляется его закупка. В данном случае речь идет о некоторой мере, имеющей экономическую природу, которая характеризует ценность сырья только относительно полученного оптимального решения.

2. Чувствительность решения к изменению запасов сырья.

Предположим, что запас сырья ресурсов «труд» изменился на 12 единиц, т. е. теперь он составляет $2000 + 12 = 2012$ единиц. Из теоремы об оценках, согласно которой значения переменных y_i в оптимальном решении двойственной задачи представляют собой оценки влияния свободных членов b_i системы ограничений – неравенств прямой задачи на величину $\Delta f(\overline{X})$ (3.9), известно, что колебание величины b_i приводит к увеличению или уменьшению $f(\overline{X})$. Оно определяется величиной y_i в случае, когда при изменении величин b_i значения переменных y_i в оптимальном плане соответствующей двойственной задачи остаются неизменными. Поэтому необходимо найти такие интервалы изменения каждого из свободных членов системы ограничений исходной ЗЛП, в которых оптимальный план двойственной задачи не менялся бы.

Определим интервалы устойчивости двойственных оценок в примере 3.3. Матрица A имеет вид (уравнения (1) – (3)):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

После приведения задачи к канонической форме, матрица A примет следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

С ненулевыми значениями в оптимальный план вошли $x_1^* = 200$, $x_2^* = 400$ и $x_4^* = 200$, следовательно, матрица A^* будет составлена из первого, второго и четвертого столбцов матрицы A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для вычисления интервалов устойчивости необходимо найти матрицу $D = A^{*-1}$:

$$D = \begin{pmatrix} -1/6 & 0 & 2/3 \\ 1/3 & 0 & -1/3 \\ 1/3 & 1 & -7/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}166 & 0 & 0{,}333 \\ 0{,}333 & 0 & -0{,}333 \\ 0{,}333 & 1 & -2{,}333 \end{pmatrix}.$$

При вычислении интервалов устойчивости примем $x_1^* = 200 - x_{k-1}$, $x_2^* = 400 - x_{k-2}$ и $x_4^* = 200 - x_{k-3}$. Интервалы устойчивости первого ресурса «труд»:

$$\Delta b_1^{(-)} = min\{x_2 / d_{21} : x_3 / d_{31}\} =$$
$$= min\{400 / 0{,}3333 : 200 / 0{,}333\} = min\{1200; 600\} = 600,$$
$$\Delta b_1^{(+)} = |x_1 / d_{11}| = |200 / -0{,}16667| = 1200.$$

Но эти оценки сразу же выдает Excel в листе «отчет по устойчивости». В частности, по этой задаче в отчете по устойчивости имеются следующие значения (таблица Б).

Таблица Б

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой коэффициент	Допустимое увеличение	Допустимое уменьшение
$A$2	x_1	200	0	40	80	10
$B$2	x_2	400	0	60	20	40

В отчёте по результатам имеем следующие значения (таблица В).

Таблица В

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая цена	Ограничение. Правая часть	Допустимое увеличение	Допустимое уменьшение
$C$4	Труд	2000	40/3	2000	1200	600
$C$5	Сырье	1200	0	1400	1E+30	200
$C$6	Оборуд.	800	20/3	800	85,7	300

Значение допустимого увеличения ячейки $C$5 равно ∞, потому что этот ресурс в оптимальном плане используется не полностью и поэтому не имеет верхней границы интервалов устойчивости.

В нашем примере определим величину изменения объема прибыли от реализации продукции при увеличении ресурса «труд» на 12 единиц. Эти изменения находятся в интервалах устойчивости двойственных оценок, поэтому можно воспользоваться теоремой об оценках:

$$\Delta f\left(\overline{X}\right) = 12 \cdot \frac{40}{3} = 160.$$

3. *Чувствительность решения к изменению коэффициентов целевой функции* представлена в таблице В в столбцах «Допустимое увеличение» и «Допустимое уменьшение».

4. Целесообразность включения в план новых изделий.

Пусть нашему предприятию были предложены на выбор три новых изделия (В, Г, Д), за счет которых можно было бы расширить номенклатуру выпускаемой продукции при тех же запасах ресурсов. Нормы затрат ресурсов и прибыль от реализации единицы продукции для этих изделий приведены в таблице Г. Определим из предложенных видов изделий выгодные для предприятия с экономической точки зрения.

Таблица Г

Ресурсы	Объективно обусловленные оценки ресурсов	Затраты ресурсов на одно изделие		
		В	Г	Д
Труд	40/3	6	4	2
Сырье	0	2	1	3
Оборудование	20/3	3	1	2
Прибыль на одно изделие		80	70	45

Эту задачу можно решить на основании свойства 3 двойственных оценок: в оптимальный план задачи на получение максимума прибыли может быть включен лишь тот вариант, для которого прибыль, недополученная из-за отвлечения дефицитных ресурсов, т.е. величина $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$, покрывается полученной прибылью c_j. Таким образом, характеристикой того или иного варианта служит разность

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j$$

При этом если $\Delta_j \le 0$, то вариант выгоден; если $\Delta_j > 0$, то невыгоден.

Рассчитаем характеристики новых изделий.

Для изделия В:

$$\Delta_B = 6 \cdot 40/3 + 0 \cdot 2 + 20/3 \cdot 3 - 80 = 100 - 80 = 20 > 0 .$$

Изделие В невыгодно для включения в план, так как затраты на его изготовление не покрываются получаемой прибылью.

Рассчитаем целесообразность включения изделия Г в план новых изделий:

$$\Delta_Г = 4 \cdot 40/3 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 20/3 - 70 = 60 - 70 = -10 .$$

Таким образом, изделие *Г* целесообразно включать в план новых изделий.

Рассчитаем целесообразность включения изделия *Д* в план новых изделий:

$$\Delta_Д = 2 \cdot 40/3 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 20/3 - 45 = 40 - 45 = -5 .$$

Таким образом, изделие *Д* целесообразно включать в план новых изделий.

3.2. Транспортная задача

В m пунктах отправления $A_1, A_2 ..., A_m$, которые в дальнейшем будем называть поставщиками (базами), сосредоточено определенное количество единиц некоторого однородного продукта, которое обозначим как a_i $i = (1, 2, ..., m)$. Данный продукт потребляется в n пунктах $B_1, B_2 ..., B_n$, которые будем называть потребителями (магазинами). Объем потребления обозначим b_j $j = (1, 2, ..., n)$. Известны расходы на перевозку единицы продукта из пункта A_i в пункт B_j, которые равны c_{ij} и приведены в матрице транспортных расходов $C = (c_{ij})$.

Требуется составить такой план прикрепления потребителей к поставщикам, т.е. план перевозок, при котором весь продукт вывозится из пунктов A_i в пункты B_j в соответствии с потребностью и общая величина транспортных издержек будет минимальной.

Обозначим количество продукта, перевозимого из пункта A_i в пункт B_j, через x_{ij} . Совокупность всех переменных x_{ij} для краткости обозначим $\overline{X}$, тогда целевая функция задачи будет иметь вид

$$f(\overline{X}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to min, \tag{3.13}$$

а ограничения:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad j = \overline{1,n}, \tag{3.14}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad i = \overline{1,m}. \tag{3.15}$$

Условия (3.14) означают полное удовлетворение спроса во всех пунктах потребления; условия (3.15) определяют полный вывоз продукции от всех поставщиков.

Необходимым и достаточным условием разрешимости задачи (3.13) — (3.15) является *условие баланса:*

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j . \tag{3.16}$$

Транспортная задача, в которой имеет место равенство (3.16), называется *закрытой* и может быть решена как задача линейного программирования с помощью симплексного метода. Однако благодаря особенностям переменных задачи и системы ограничений разработаны специальные, менее громоздкие методы ее решения. Наиболее применяемым методом является *метод потенциалов,* при котором каждому $i-му$ поставщику устанавливается потенциал u_i, который можно интерпретировать как цену продукта в пункте поставщика. А каждому $j-му$ потребителю устанавливается потенциал v_j , который можно принять условно за цену продукта в пункте потребителя. В простейшем случае цена продукта в пункте потребителя равна его цене в пункте поставщика плюс транспортные расходы на его доставку, т.е.

$$v_j = u_i + c_{ij}. \tag{3.17}$$

Первым этапом алгоритма метода потенциалов для закрытой транспортной задачи решения является составление начального распределения (начального плана перевозок). Для реализации этого начального этапа имеется, в свою очередь, ряд методов: северо-западного угла, наименьших стоимостей, аппроксимаций Фогеля и др.

Вторым этапом служит построение системы потенциалов на основе равенства (3.17) и проверка начального плана на оптимальность; в случае его неоптимальности переходят к третьему этапу, содержание которого заключается в реализации так называемых циклов перераспределения (корректировка плана прикрепления потребителей к поставщикам), после чего переходят опять ко второму этапу. Совокупность процедур третьего и второго этапов образует одну итерацию; эти итерации повторяются, пока план перевозок не окажется оптимальным по критерию (3.13).

Если баланс (3.16) не выполняется, то ограничения (3.14) или (3.15) имеют вид неравенств типа «меньше или равно»; транспортная задача в таком случае называется *открытой.* Для решения открытой транспортной задачи методом потенциалов ее сводят к закрытой задаче путем ввода или фиктивного потребителя, если в неравенства превращаются условия (3.15), или фиктивного поставщика — в случае превращения в неравенства ограничений (3.14).

Рассмотрим этапы реализации *метода потенциалов* для закрытой транспортной задачи более подробно. Прежде всего, следует отметить, что при условии баланса (3.16) ранг системы линейных уравнений (3.14), (3.15) равен $m+n-1$. Таким образом, из общего числа $m \times n$ неизвестных, базисных неизвестных будет $m+n-1$. Вследствие этого при любом допустимом базисном распределении в матрице перевозок (таблице поставок), представленной в общем виде в табл. 3.1, будет занято ровно $m+n-1$ клеток, которые будем называть *базисными* в отличие от остальных *свободных* клеток. Занятые клетки будем, например, отмечать диагональной чертой (см. табл. 3.1).

Таблица 3.1

Пример решения транспортной задачи методом потенциалов

Мощности поставщиков	Мощности потребителя			
	b_1	b_2	...	b_n
a_1	c_{11}/x_{11}	c_{12}/x_{12}	...	c_{1n}/x_{1n}
a_2	c_{21}/x_{21}	c_{22}/x_{22}	...	c_{2n}/x_{2n}
...	...	...	...	...
a_m	c_{m1}/x_{m1}	c_{m2}/x_{m12}	...	c_{mn}/x_{mn}

Этап 1. Первоначальное закрепление потребителей за поставщиками.

Рассмотрим два метода получения начального распределения (начального опорного плана): метод наименьших стоимостей и метод Фогеля. При каждом из этих методов при заполнении некоторой клетки, кроме последней, вычеркивается или только строка матрицы перевозок, или только столбец; лишь при заполнении последней клетки вычеркиваются и строка, и столбец. Такой подход будет гарантировать, что базисных клеток будет ровно $m+n-1$. Если при заполнении некоторой (не последней) клетки одновременно удовлетворяются мощности и поставщика, и потребителя, то вычеркивается, например, только строка, а в соответствующем столбце заполняется незанятая клетка так называемой «нулевой поставкой», после чего вычеркивается и столбец. Для идентификации клетки обычно в скобках указываются номера ее строки и столбца.

В различных модификациях метода *наименьших стоимостей* заполнение клеток матрицы перевозок проводится с учетом значений величин c_{ij}. Так, в модификации *двойного предпочтения* отмечают клетки с наименьшими стоимостями перевозок сначала по каждой строке, а затем по каждому столбцу. Клетки, имеющие две отметки, заполняют в первую очередь, затем заполняют клетки с одной отметкой, а данные о нераспределенном грузе записывают в неотмеченные клетки с наименьшими стоимостями. При этом из двух клеток с одинаковой стоимостью перевозок предпочтение отдают клетке, через которую осуществляется больший объем перевозок. Вычеркивание строк и столбцов при заполнении клеток проводится по описанным выше правилам.

Пример начального распределения методом наименьших стоимостей двойного предпочтения для некоторых исходных данных представлен в табл. 3.2, в которой указаны цены перевозки одной единицы товара от поставщика к потребителю. В данном случае транспортная задача имеет закрытый вид.

Таблица 3.2

Пример решения транспортной задачи методом наименьшей стоимости двойного предпочтения

Поставщик	Потребитель				Мощность поставщиков
	A	*B*	*C*	*D*	
I	4	5	2	3	60
II	1	3	6	2	100
III	6	2	7	4	120
Мощность потребителя	30	100	40	110	280 / 280

Так, стоимость перевозки единицы груза от поставщика I потребителю *A* составляет 4 денежные единицы, а от поставщика II потребителю *B* – 3 денежные единицы.

Необходимо заполнить клетки так (записать еще и объемы перевозок), чтобы в итоге получить наименьшую результирующую стоимость перевозок всего товара с баз в магазины.

Для этого вначале отметим индексом m клетки с наименьшей стоимостью перевозок по горизонтали (табл. 3.3).

Таблица 3.3

Распределение наименьших стоимостей перевозок по горизонтали

Поставщик	Потребитель				Мощность поставщиков
	A	*B*	*C*	*D*	
I	4	5	$2m$	3	60
II	$1m$	3	6	2	100
III	6	$2m$	7	4	120
Мощность потребителя	30	100	40	110	280 / 280

Теперь отметим индексом m клетки с наименьшей стоимостью перевозки по вертикали (учтем, что может быть и два индекса) (табл. 3.4).

Таблица 3.4

Распределение наименьших стоимостей перевозок по вертикали

Поставщик	Потребитель				Мощность поставщиков
	A	*B*	*C*	*D*	
I	4	5	$2mm$	3	60
II	$1mm$	3	6	$2m$	100
III	6	$2mm$	7	4	120
Мощность потребителя	30	100	40	110	280 / 280

Всего надо заполнить $m+n-1$ клеток, где m – число баз, n – число магазинов, в нашем случае должно быть $3+4-1=6$ заполненных клеток.

Мы отметили четыре клетки. Заполним пока их, а потом недостающие две (ранг матрицы $4+3-1=6$, т. е. надо заполнить 6 клеток из 12). Здесь 4 – число магазинов, 3 – число баз.

Порядок заполнения клеток: (2; 1), (3; 2), (1; 3), (2; 4) (табл. 3.5).

Таблица 3.5

Определение наименьшей стоимости перевозки

Поставщик	Потребитель				Мощность поставщиков
	A	*B*	*C*	*D*	
I	4	5	$2mm$/40	3	60
II	$1mm$/30	3	6	$2m$/70	100
III	6	$2mm$/100	7	4	120
Мощность потребителя	30	100	40	110	280 / 280

Выбираем оставшиеся две клетки по минимальной цене перевозки. Минимальная цена 3. Ее имеют две клетки: (2; 2) и (1; 4). Клетку (2; 2) заполнять нельзя, так как второй магазин загружен полностью. Осталась клетка (1; 4). С базы I можно поставить только 20 единиц товара (поскольку сорок единиц уже поставлены в третий магазин).

Следующая наименьшая цена 4. Ей соответствуют клетки (1; 1) и (3; 4). Клетку (1; 1) заполнять не можем, поскольку первый магазин загружен полностью. В клетку (3; 4) можно поставить 20 единиц товара. Таким образом, заполнены все клетки (табл. 3.6).

Таблица 3.6

Итоговая таблица решения транспортной задачи

Поставщик	Потребитель				Мощность поставщиков
	A	*B*	*C*	*D*	
I	4	5	2*mm*/ 40	3/ 20	60
II	1*mm*/ 30	3	6	2*m*/ 70	100
III	6	2*mm*/ 100	7	4/ 20	120
Мощность потребителя	30	100	40	110	280 / 280

Проверяем сумму товара по горизонтали (по базам) и по вертикали (по магазинам).

Суммарные затраты на перевозки (см. табл. 3.6) составляют:

$$f\left(\overline{X}\right)=1\cdot 30+2\cdot 100+2\cdot 40+2\cdot 70+3\cdot 20+4\cdot 20=590.$$

Ранг матрицы перевозок равен $3+4-1=6$. И у нас заполнено 6 клеток.

Метод Фогеля основан на вычислении «штрафной стоимости», которая выражает сумму переплаты за доставку груза каждого поставщика и потребителя. Штрафная стоимость для каждой строки и столбца – разность между стоимостью наиболее дешевого маршрута и стоимостью следующего за ним маршрута с точки зрения критерия минимизации стоимости перевозок.

Алгоритм распределения перевозок методом Фогеля.

1. Вычислить значения штрафной стоимости для каждой строки и каждого столбца.

2. Выбрать строку или столбец с наибольшим значением штрафной стоимости, и в клетку с наименьшим значением стоимости перевозки для данной строки и столбца поместить наибольшее количество продукта.

3. Провести корректировку итоговых значений по строкам и столбцам.

4. В строках или столбцах, в которых предложение или спрос равны нулю, ставится прочерк.

5. Вернуться к шагу 1 и пересчитать штрафные стоимости без учета клеток, в которых указаны перевозки, или клеток, где стоит прочерк.

Пусть дана исходная таблица поставщиков, магазинов и стоимости перевозок (табл. 3.7)

Таблица 3.7

Алгоритм решения транспортной задачи методом Фогеля

Торговый склад	Розничный магазин			Общее предложение
	A	B	C	
P	***10***	***20***	***5***	9
Q	***2***	***10***	***8***	4
R	***1***	***20***	***7***	8
Общая потребность	3	5	6	14 / 21

Здесь полужирным курсивом выделены цены перевозок от поставщиков потребителям. Мы видим, что задача открытая и, поскольку мощности поставщиков больше, вводим фиктивный магазин «Ф» с мощностью 7 единиц (табл. 3.8).

Таблица 3.8

Алгоритм решения транспортной задачи методом Фогеля (этап 1)

Торговый склад	Розничный магазин				Общее предложение
	A	B	C	Ф	
P	***10***	***20***	***5***	***0***	9
Q	***2***	***10***	***8***	***0***	4
R	***1***	***20***	***7***	***0***	8
Общая потребность	3	5	6	7	21 / 21

Теперь определяем штрафные стоимости, для чего вводим графы штрафной стоимости (табл. 3.9).

Таблица 3.9

Алгоритм решения транспортной задачи методом Фогеля (этап 2)

Торговый склад	Розничный магазин				Общее предлож.	Штрафная стоимость
	A	B	C	Ф		
P	***10***	***20***	***5***	***0***	9	5 15 10
Q	***2***	***10***	***8***	***0***	4	6 8 2
R	***1***	***20***	***7***	***0***	8	6 19 13
Общая потребность	3	5	6	7	21 / 21	
1-й штраф	1=2-1	10=20-10	2=7-5	0=0-0		
2-й штраф	9=10-1	0=20-20	3=8-5	0=0-0		
3-й штраф	8=10-2	-	1=8-7	0=0-0		

Теперь составляем начальный план перевозок методом Фогеля (табл. 3.10).

Таблица 3.10

Начальный план перевозок методом Фогеля

Торговый склад	Розничный магазин				Общее предлож.	Штрафная стоимость
	A	B	C	Ф		
P	***10***	***20*** 1	***5*** 6	***0*** 2	9-1-1-2=0	5 15 10
Q	***2***	***10*** 4	***8***	***0***	4-4=0	6 8 2
R	***1*** 3	***20***	***7***	***0*** 5	8-3-5=0	6 19 13
Общая потребность	3-3=0	5-1-4=0	6-6=0	7-2-5=0	21 / 21	
1-й штраф	1=2-1	10=20-10	2=7-5	0=0-0		
2-й штраф	9=10-1	0=20-20	3=8-5	0=0-0		
3-й штраф	8=10-2	-	1=8-7	0=0-0		

Этап 2. Проверка оптимальности полученного плана перевозок.

Введем специальные показатели u_i для каждой строки матрицы перевозок (каждого поставщика), где $i = \overline{1,m}$, и показатели v_j для каждого столбца (каждого потребителя), где $j = \overline{1,n}$ (так называемые потенциалы). Эти показатели называются потенциалами поставщиков и потребителей, их удобно интерпретировать как цены продукта в соответствующих пунктах поставщиков и потребителей (теневые цены). Потенциалы подбирают таким образом, чтобы для заполненной клетки $(i; j)$ выполнялось равенство (3.17) – $v_j = u_i + c_{ij}$. Совокупность уравнений вида (3.17), составленных для всех заполненных клеток (всех базисных неизвестных), образует систему $n+m-1$ линейных уравнений с $n+m$ неизвестными u_i и v_j . Эта система всегда совместна, причем значение одного из неизвестных можно задавать произвольно, например $u_1 = 0$. Тогда значения остальных неизвестных находятся из системы однозначно.

Полагаем $u_1 = 0$. Далее, по заполненной клетке $(1;3)$ находим v_3 $(v_j = u_i + c_{ij})$:

$$v_3 = u_1 + c_{13} = 0 + 2 = 2; \quad \to \quad v_3 = 2.$$

Далее по заполненной клетке $(1;4)$ находим v_4:

$$v_4 = u_1 + c_{14} = 0 + 3 = 3 \quad \to \quad v_4 = 3.$$

По клетке $(2;4)$ находим u_2:

$$v_4 = 3 = u_2 + c_{24} = u_2 + 2 \quad \to \quad u_2 = 1.$$

По клетке $(3;4)$ находим u_3:

$$v_4 = 3 = u_3 + c_{34} = u_2 + 4 \quad \to \quad u_3 = -1.$$

По клетке $(3;2)$ находим v_2:

$$v_2 = u_3 + c_{32} = -1 + 2 = 1 \quad \to \quad v_2 = 1.$$

По клетке $(2;1)$ находим v_1:

$$v_1 = u_2 + c_{21} = 1 + 1 = 2 \quad \to \quad v_1 = 2.$$

В табл. 3.6 вставим соответствующие столбец и строку и, заполнив её найденными значениями, получим табл. 3.11.

Таблица 3.11

Итоговая транспортная таблица по методу Фогеля

Поставщик	Потребитель				u_i	Мощность поставщиков
	A	*B*	*C*	*D*		
I	4	5	2*mm*/ 40	3/ 20	*0*	60
II	1*mm*/ 30	3	6	2*m*/ 70	*1*	100
III	6	2*mm*/ 100	7	4/ 20	*-1*	120
v_j	*2*	*1*	*2*	*3*		
Мощность потребителя	30	100	40	110		280 / 280

Чтобы оценить оптимальность найденного распределения, для всех клеток $(i;j)$ матрицы перевозок определяются их *оценки,* которые обозначим через d_{ij}, по формуле

$$d_{ij} = (u_i + c_{ij}) - v_j \ . \tag{3.18}$$

Выражение $u_i + c_{ij}$ можно трактовать как сумму цены продукта у поставщика и стоимости перевозки; эта сумма путем вычитания сравнивается с ценой продукта у соответствующего потребителя v_j. Очевидно, оценки заполненных клеток равны нулю (цена потребителя покрывает цену поставщика и стоимость перевозок). Таким образом, об оптимальности распределения можно судить по величинам оценок свободных клеток. Если оценка некоторой свободной клетки отрицательна, это можно интерпретировать так: цена, предлагаемая соответствующим потребителем, больше суммы цены поставщика и стоимости перевозки, т. е. если бы эта клетка была занята, то можно было бы получить дополнительный экономический эффект. Следовательно, условием оптимальности распределения служит условие неотрицательности оценок свободных клеток матрицы перевозок. Определим оценки свободных клеток матрицы перевозок из табл. 3.11.

$$d_{11} = (u_1 + c_{11}) - v_1 = 0 + 4 - 2 = 2, \quad d_{12} = (u_1 + c_{12}) - v_2 = 0 + 5 - 1 = 4,$$
$$d_{13} = (u_1 + c_{13}) - v_3 = 0 + 2 - 2 = 0, \quad d_{14} = (u_1 + c_{14}) - v_4 = 0 + 3 - 3 = 0,$$
$$d_{21} = (u_2 + c_{21}) - v_1 = 1 + 1 - 2 = 0, \quad d_{22} = (u_2 + c_{22}) - v_2 = 1 + 3 - 1 = 3,$$
$$d_{23} = (u_2 + c_{23}) - v_3 = 1 + 6 - 2 = 5, \quad d_{24} = (u_2 + c_{24}) - v_4 = 1 + 2 - 3 = 0,$$
$$d_{31} = (u_3 + c_{31}) - v_1 = -1 + 6 - 2 = 3, \quad d_{32} = (u_3 + c_{32}) - v_2 = -1 + 2 - 1 = 0,$$
$$d_{33} = (u_3 + c_{33}) - v_3 = -1 + 7 - 2 = 4, \quad d_{34} = (u_3 + c_{34}) - v_4 = -1 + 4 - 3 = 0.$$

Получим матрицу оценок:

$$d_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку все оценки неотрицательны, то нет возможности улучшить данный план перевозок, т. е. он оптимален (напомним, что суммарные затраты на перевозку по этому плану равны 590). Кроме того, в данном случае оценки всех свободных клеток строго больше нуля, т. е. любой другой план, предусматривающий занятие хотя бы одной из этих клеток, будет более дорогостоящим, а следовательно, неоптимальным. Это говорит о том, что найденный оптимальный план является *единственным.*

Наличие нулевых оценок свободных клеток в оптимальном плане перевозок, наоборот, свидетельствует о наличии альтернативных оптимальному планов.

Рассмотрим пример открытой транспортной задачи.

Стоимость доставки единицы груза из каждого пункта отправления в соответствующие пункты назначения задана матрицей тарифов (табл. 3.12).

Таблица 3.12

Пример открытой транспортной задачи

Поставщик	Потребитель					Запасы
	1	2	3	4	5	
1	3	20	8	13	4	80
2	4	4	18	14	3	60
3	10	4	18	8	6	30
4	7	19	17	10	1	60
Потребности	10	30	40	50	70	230/200

Проверим необходимое и достаточное условие разрешимости задачи:

$$\sum_{i=1}^{4} a_i = 80 + 60 + 30 + 60 = 230,$$

$$\sum_{j=1}^{5} b_j = 10 + 30 + 40 + 50 + 70 = 200.$$

Как видно, суммарная потребность груза в пунктах назначения меньше запасов груза на базах. Следовательно, модель исходной транспортной задачи является открытой. Чтобы получить закрытую модель, введем дополнительный (фиктивный) магазин с запасом груза, равным 30 (230–200). Тариф перевозки единицы груза в этот фиктивный магазин из всех баз полагаем равным нулю.

Занесем исходные данные в распределительную табл. 3.13.

Таблица 3.13

Распределительная таблица

Поставщик	Потребитель						Запасы
	1	2	3	4	5	6 (фикт.)	
1	3*mm*	20	8	13	4	0	80
2	4	4 *m*	18	14	3 *m*	0	60
3	10	4 *m*	18	8 *m*	6	0	30
4	7	19	17	10	1 *mm*	0	60
Потребности	10	30	40	50	70	30	230/230

Используя метод наименьшей стоимости двойного предпочтения, построим первый опорный план транспортной задачи, поместив в квадратные скобки количество товара, перевозимого от конкретного поставщика определенному потребителю (табл. 3.14).

Таблица 3.14

Первый опорный план транспортной задачи

Поставщик	Потребитель					Запасы	
	1	2	3	4	5	6	
1	3*mm* [10]	20	8[40]	13[20]	4	0[10]	80
2	4	4 *m*[30]	18	14	3 *m*[10]	0[20]	60
3	10	4	18	8 *m*[30]	6	0	30
4	7	19	17	10	1*mm* [60]	0	60
Потребности	10	30	40	50	70	30	230/230

Следовательно, план перевозок будет

$$f(\overline{X}) = 3 \cdot 10 + 8 \cdot 40 + 13 \cdot 20 + 4 \cdot 30 + 3 \cdot 10 + 8 \cdot 30 + 1 \cdot 60 = 1060.$$

В результате получен первый опорный план, который является допустимым, так как все грузы из баз вывезены, потребность магазинов удовлетворена, а план соответствует системе ограничений транспортной задачи.

Подсчитаем число занятых клеток табл. 3.14, их 9, а должно быть $m + n - 1 = 9$. Следовательно, опорный план является невырожденным. Проверим оптимальность опорного плана. Найдем потенциалы u_i, v_j по занятым клеткам таблицы, в которых $v_j - u_i = c_{ij}$, полагая, что $u_1 = 0$.

$-u_1 + v_1 = 3; 0 + v_1 = 3; v_1 = 3,$ $-u_1 + v_3 = 8; 0 + v_3 = 8; v_3 = 8,$

$-u_1 + v_4 = 13; 0 + v_4 = 13; v_4 = 13,$ $-u_3 + v_4 = 8; 13 – u_3 = 8; u_3 = 5,$

$-u_1 + v_6 = 0; 0 + v_6 = 0; v_6 = 0,$ $-u_2 + v_6 = 0; 0 + u_2 = 0; u_2 = 0,$

$-u_2 + v_2 = 4; 0 + v_2 = 4; v_2 = 4$, $-u_2 + v_5 = 3; 0 + v_5 = 3; v_5 = 3,$

$-u_4 + v_5 = 1; 3 – u_4 = 1; u_4 = 2.$

Поскольку $d_{ij} = u_i + c_{ij} - v_j$, то матрица оценок будет иметь вид:

$$d_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 16 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 10 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 5 & 15 & 0 & 8 & 5 \\ 6 & 17 & 11 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Опорный план не является оптимальным, так как существуют оценки свободных клеток, для которых $d_{ij} < 0$, в частности $d_{44} = -1$. Для выбранной клетки строится замкнутая линия (контур), начальная вершина которой лежит в выбранной клетке, а все остальные вершины находятся в занятых клетках; при этом направления отдельных отрезков контура могут быть только горизонтальными и вертикальными. Вершиной контура, кроме первой, является занятая клетка, где отрезки контура образуют один прямой угол (нельзя рассматривать как вершины клетки, где горизонтальные и вертикальные отрезки контура пересекаются). Очевидно, число отрезков контура, как и его вершин, будет четным. В вершинах контура расставляются поочередно знаки «+» и «–», начиная со знака «+» в выбранной свободной клетке.

Величина перераспределяемой поставки определяется как наименьшая из величин поставок в вершинах контура со знаком «–», и на это значение увеличиваются поставки в вершинах со знаком «+» и уменьшаются поставки в вершинах со знаком «–». Это правило гарантирует, что в вершинах контура не появятся отрицательные поставки. Начальная выбранная клетка окажется занятой, в то время как одна из занятых клеток при этом обязательно освободится. Если величина перераспределяемой поставки равна поставкам не в одной, а в нескольких вершинах контура со знаком «–», то освобождается только одна клетка, обычно с наибольшей стоимостью перевозки, а все другие клетки остаются занятыми с нулевой поставкой.

В перспективную клетку (4; 4) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «–», «+», «–». Цикл приведен в табл. 3.15.

Таблица 3.15

Величина перераспределяемой поставки товара

Поставщик	Потребитель						Запасы
	1	2	3	4	5	6	
1	3[10]	20	8[40]	13[20][–]	4	0[10][+]	80
2	4	4[30]	18	14	3[10][+]	0[20][–]	60
3	10	4	18	8[30]	6	0	30
4	7	19	17	10[+]	1[60][–]	0	60
Потребности	10	30	40	50	70	30	230/230

Из грузов x_{ij}, стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее значение, т. е. *min* (2, 6) = 20. Прибавляем 20 к объемам грузов, стоящих в плюсовых клетках и вычитаем 20 из x_{ij}, стоящих в минусовых клетках. В результате получим новый опорный план (табл. 3.16).

Таблица 3.16

Новый опорный план

Поставщик	Потребитель						Запасы
	1	2	3	4	5	6	
1	3[10]	20	8[40]	13[0]	4	0[30]	80
2	4	4[30]	18	14	3[30]	0	60
3	10	4	18	8[30]	6	0	30
4	7	19	17	10[20]	1[40]	0	60
Потребности	10	30	40	50	70	30	230/230

Проверим оптимальность опорного плана. Найдем потенциалы u_i и v_j по занятым клеткам табл. 3.16, в которых $v_j - u_i = c_{ij}$, полагая, что $u_1 = 0$.

$-u_1 + v_1 = 3$; $0 + v_1 = 3$; $v_1 = 3$, $-u_1 + v_3 = 8$; $0 + v_3 = 8$; $v_3 = 8$,

$-u_1 + v_4 = 13$; $0 + v_4 = 13$; $v_4 = 13$, $-u_3 + v_4 = 8$; $13 - u_3 = 8$; $u_3 = 5$,

$-u_4 + v_4 = 10$; $13 - u_4 = 10$; $u_4 = 3$, $-u_4 + v_5 = 1$; $-3 + v_5 = 1$; $v_5 = 4$,

$-u_2 + v_5 = 3$; $4 - u_2 = 3$; $u_2 = 1$, $-u_2 + v_2 = 4$; $-1 + v_2 = 4$; $v_2 = 5$,

$-u_1 + v_6 = 0$; $0 + v_6 = 0$; $v_6 = 0$.

Поскольну $d_{ij} = u_i + c_{ij} - v_j$, то матрица оценок будет иметь вид:

$$d_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 11 & 2 & 0 & 0 \\ 12 & 4 & 15 & 0 & 7 & 5 \\ 7 & 17 & 12 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Опорный план является оптимальным.

Затраты составят:

$$f(\overline{X}) = 3 \cdot 10 + 8 \cdot 40 + 4 \cdot 30 + 3 \cdot 30 + 8 \cdot 30 + 10 \cdot 20 + 1 \cdot 40 = 1040.$$

3.3. Задача о назначениях

С помощью *задачи о назначениях* можно получить ответ на вопросы типа: как распределить рабочих по станкам, чтобы общая выработка была наибольшей или затраты на заработную плату наименьшими. Как наилучшим образом распределить экипажи самолетов, как назначить людей на различные должности (отсюда и название задачи) и т. д.

Математически такие задачи относятся к тому же типу распределительных задач, что и транспортная задача, с той особенностью, что здесь объемы наличных и требующихся ресурсов для выполнения каждой работы равны единице ($a_i = b_j = 1$), а все переменные x_{ij} либо равны единице, если $i-й$ работник назначен на $j-ю$ работу, либо равны нулю в других случаях. Исходные данные задачи о назначениях группируются в таблице, которая называется *матрицей оценок*, а результаты – в *матрице назначений*.

Задача о назначениях в общем виде может быть сформулирована следующим образом. Имеется n работников, которые могут выполнять n работ, причем использование $i-го$ работника на $j-й$ работе, например, приносит доход c_{ij}. Требуется поручить каждому из работников выполнение одной, вполне определенной работы, чтобы максимизировать в данном случае суммарный доход.

Введем переменные:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } i\text{-й работник выполняет } j\text{-ю работу}, \\ 0 \text{ - в противном случае.} \end{cases}$$

Задача состоит в том, чтобы найти распределение $\overline{X} = (x_{ij})$ работников по работам (т. е. найти матрицу назначений), которое максимизирует целевую функцию

$$f(\overline{X}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to max \quad (3.19)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1,n}, \quad (3.20)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1,n}, \quad (3.21)$$

причем x_{ij} равны либо 0, либо 1 (так называемые *булевы переменные*) для всех $i, j = \overline{1,n}$.

Ограничения (3.20) отражают условие того, что за каждым работником может быть закреплена только одна работа, а ограничения (3.21) означают, что для выполнения каждой работы может быть выделен только один работник.

Если в задаче о назначениях элементы матрицы оценок представляют собой, например, время выполнения каждым работником любой из работ, то целевая функция этой задачи будет минимизироваться. Отметим также, что при решении задач о назначениях часто используются алгоритмы и методы решения транспортных задач, в частности метод потенциалов.

Особенность задачи о назначениях:

– число пунктов производства равно числу пунктов назначения. Транспортная таблица имеет форму квадрата;

– в каждом пункте назначения объем потребности равен 1. Величина предложения каждого пункта производства равна 1.

Этапы решения задачи о назначениях (венгерский метод).

1. В каждой строке найти минимальный элемент и вычесть его значение из всех элементов данной строки.

2. В каждом столбце найти минимальный элемент и вычесть его значение из всех элементов данного столбца.

3. Найти строку, содержащую только одно нулевое значение стоимости, и в клетку, соответствующую данному значению, поместить один элемент. Если такие строки отсутствуют, допустимо начать с любого нулевого значения стоимости.

4. Зачеркнуть оставшиеся нулевые значения данного столбца.

5. Повторять пп. 3 и 4 до тех пор, пока продолжение описанной процедуры окажется невозможным.

6. Провести минимальное число прямых через строки и столбцы матрицы (не по диагоналям) таким образом, чтобы они проходили через все нули, содержащиеся в таблице.

7. Найти наименьший среди элементов, через который не проходит ни одна из проведенных прямых.

8. Вычесть его из всех элементов, через которые не проходят прямые.

9. Прибавить найденный элемент ко всем элементам таблицы, которые лежат на пересечении проведенных ранее прямых.

10. Все элементы матрицы, через которые проходит только одна прямая, оставить без изменения.

11. Повторять пп. 3 и 4 до тех пор, пока продолжение описанной процедуры окажется невозможным.

Пример решения задачи о назначениях

Некоторая компания имеет 4 сбытовые базы (*A, B, C, D*) и 4 заказа (I, II, III, IV), которые необходимо доставить потребителям. Каждое складское помещение может разместить один заказ. Расстояния между складами и потребителями указаны в табл. 3.17. Как следует распределить заказы по сбытовым базам, чтобы общая дальность транспортировки была минимальной?

Таблица 3.17

Алгоритм решения задачи о назначениях

Торговая база	Расстояние до потребителя, км			
	I	II	III	IV
A	68	72	75	83
B	56	60	58	63
C	38	40	35	45
D	47	42	40	45

Этап 1. Выявление наименьших значений по строкам:

Торговая база	Расстояние в км до потребителя				Наименьший элемент строки
	I	II	III	IV	
A	68	72	75	83	68
B	56	60	58	63	56
C	38	40	35	45	35
D	47	42	40	45	40

Вычитание наименьшего элемента по строкам:

Торговая база	Расстояние до потребителей, миль				Наименьший элемент строки
	I	II	III	IV	
A	0	4	7	15	68
B	0	4	2	7	56
C	3	5	0	10	35
D	7	2	0	5	40

Выявление наименьшего элемента по столбцам:

Торговая база	Расстояние до потребителей, миль				Наименьший элемент строки
	I	II	III	IV	
A	0	4	7	15	68
B	0	4	2	7	56
C	3	5	0	10	35
D	7	2	0	5	40
Наименьший элемент столбца	0	2	0	5	

Вычитание наименьшего элемента по столбцам:

Торговая база	Расстояние до потребителей, миль			
	I	II	III	IV
A	0	2	7	10
B	0	2	2	2
C	3	3	0	5
D	7	0	0	0

Этап 2. Назначения в клетки с нулевым значением.

В первой строке выбираем нулевой элемент и зачеркиваем нулевой элемент во второй строке этого же столбца. В третьей строке выбираем нулевой элемент и зачеркиваем нулевой элемент в четвертой строке этого же столбца. В четвертой строке зачеркиваем нулевой элемент четвертого столбца этой же строки. (Можно было выбрать и нулевой элемент четвертой строки четвертого столбца).

[0]	2	7	10
--0	2	2	2
3	3	[0]	5
7	[0]	--0	--0

Этап 3. Проведение прямых линий через нулевые элементы.

[0]	2	7	10
--0	2	2	2
3	3	[0]	5
7	[0]	--0	--0

Наименьший элемент, не лежащий на прямых – 2. Вычтем его из всех элементов, не лежащих на прямых.

[0]	0	7	8
--0	0	2	0
3	1	[0]	3
7	[0]	--0	--0

Прибавим его к элементам, лежащим на пересечении прямых.

0	0	7	8
--0	0	2	0
3	1	0	3
9	0	2	--0

Получили скорректированную таблицу с назначениями для нулевых клеток.

0	0	7	8
0	0	2	0
3	1	0	3
9	0	2	0

Запишем первое альтернативное решение.

[0]	0	7	8
0	[0]	2	0
3	1	[0]	3
9	0	2	[0]

Согласно исходной таблице 3.17, дальность перевозок:

$$68 + 60 + 35 + 45 = 208 \text{ км.}$$

Запишем второе альтернативное решение.

[0]	0	7	8
0	0	2	[0]
3	1	[0]	3
9	[0]	2	0

Дальность перевозок:

$$68 + 42 + 35 + 63 = 208 \text{ км.}$$

Запишем третье альтернативное решение.

0	[0]	7	8
[0]	0	2	0
3	1	[0]	3
9	0	2	[0]

Дальность перевозок:

$$56 + 72 + 35 + 45 = 208 \text{ км.}$$

Общая дальность всех трёх альтернативных решений одинакова.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

Задание 3.1. Сформулируйте двойственную задачу из исходной:

$$f(x) = 60x_1 + 50x_2 \quad \rightarrow \quad max,$$

$$\begin{cases} 1{,}5x_1 + 2x_2 \le 42, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 60, \\ 5x_1 + 5x_2 \le 200, \\ x_1 \le 18. \end{cases}$$

Задание 3.2. Сформулируйте двойственную задачу из исходной:

$$f(x) = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \quad \rightarrow \quad max,$$

$$\begin{cases} 1{,}5x_1 + 2x_2 + x_3 \le 15, \\ 0{,}5x_1 + x_2 \le 20, \\ 3x_1 + 4x_3 \le 25, \\ x_2 + x_3 \le 15. \end{cases}$$

Задание 3.3. Запишите математическую модель задачи. Сформулируйте двойственную задачу из исходной.

Мебельная фабрика выпускает стулья и столы. Для производства используются три ресурса – дерево, человеко-часы, электроэнергия. Максимально возможные суточные запасы этих ресурсов составляют 8 м^3, 40 чел.-ч и 25 кВт·ч соответственно. Расходы сырья на 1 единицу изделий приведены в таблице:

Ресурсы	Расход исходных продуктов на 1 изделие	
	стулья	столы
Дерево, м^3	0,1	0,2
Трудоемкость, человеко-час	1,5	3
Электроэнергия, кВт·ч	0,5	2

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на столы не превышает спрос на стулья более чем на 25 штук. Кроме того, установлено, что спрос на столы не превышает 50 штук в сутки. Оптовая цена одного стула равна 500 руб., одного стола – 1,4 тыс. руб.

Задание 3.4. Запишите математическую модель задачи. Сформулируйте двойственную задачу из исходной.

Для производства карамели двух видов *A* и *B* кондитерская фабрика использует сахар и фруктовое пюре. Норма затрат этих продуктов, а также затраты на 1 кг карамели, цена ее реализации и общий запас производственных ресурсов указаны в таблице.

Ресурсы	Норма затрат ресурсов на 1 кг изделия		Общий запас ресурсов
	ккарамель *A*	карамель *B*	
Сахар, кг	0,3	0,5	150
Фруктовое пюре, кг	0,4	0,2	100
Трудоемкость, человек. час	0,4	0,5	160
Электроэнергия, кВт*ч	0,2	0,1	90
Цена 1 кг карамели, руб.	45	50	–

Известно, что спрос на карамель *B* не превышает спрос на карамель *A* более, чем 10 единиц в сутки.

Задание 3.5. Два торговых склада поставляют продукцию в четыре магазина. Издержки транспортировки продукции с торговых складов в магазины, наличие продукции на складах и потребности магазинов приведены в таблице.

Торговый склад	Транспортные издержки				Предложение продукции, ед.
	Магазин				
	A	*B*	*C*	*D*	
1	4	8	5	6	100
2	8	2	4	7	200
Потребность в продукции, ед.	50	100	75	75	–

Требуется найти распределение перевозок, позволяющее свести к минимуму общие транспортные издержки:

– методом минимальной стоимости;

– методом северо-западного угла;

– методом Фогеля.

Рассчитайте транспортные издержки для каждого распределения. Какое распределение наиболее эффективно?

Задание 3.6. Три завода поставляют некую разновидность стали на 5 торговых складов. Спрос каждого торгового склада, наличие стали на заводах, а также значения стоимости транспортировки 1 т стали приведены в таблице.

Завод	Транспортные издержки, руб. за единицу					Предложение, т
	Торговый склад					
	1	2	3	4	5	
A	20	27	33	25	34	200
B	22	36	34	28	26	250
C	26	29	27	26	28	300
Потребность, т	100	150	200	100	200	–

Требуется определить минимальную стоимость транспортировки (распределить и определить оптимальность решения, при необходимости перераспределить и определить оптимальность нового распределения).

Задание 3.7. Три торговых склада *X*, *Y*, *Z* могут осуществлять поставки 6, 3 и 4 единиц продукта в три магазина *L*, *M*, *N*, спрос которых равен 4, 5 и 1 единицам соответственно. Значения единичной стоимости транспортировки указаны в таблице.

Торговый склад	Транспортные издержки, руб. за единицу			Общее предложение
	Магазины			
	L	*M*	*N*	
X	6	4	9	6
Y	5	3	2	3
Z	2	3	6	4
Общая потребность	4	5	1	–

Как следует распределить перевозки, чтобы общая стоимость транспортировки была минимальной?

Задание 3.8. Решите транспортную задачу, распределив ресурсы методом Фогеля.

Торговый склад	Транспортные издержки				Предложение
	Магазин				
	A	B	C	D	
I	5	4	6	3	200
II	1	10	2	1	300
III	2	3	3	1	100
Потребность	150	150	250	50	

Задание 3.9. Решите транспортную задачу, распределив ресурсы методом Фогеля.

Торговый склад	Транспортные издержки			Предложение
	Магазины			
	A	B	C	
1	7	3	4	80
2	5	7	8	60
3	3	8	2	60
Потребность	30	70	60	

Задания 3.10–3.19. Решите транспортные задачи

3.10

Торговый склад	Транспортные издержки				Предложение
	Магазин				
	A	B	C	D	
I	6	5	4	0	500
II	8	8	2	6	300
III	9	0	7	6	100
Потребность	400	200	150	250	

3.11

Торговый склад	Транспортные издержки				Предложение
	Магазин				
	A	B	C	D	
I	5	1	2	4	92
II	2	5	0	3	45
III	0	2	2	5	63
Потребность	60	40	36	14	

3.12

Торговый склад	Транспортные издержки				Предложение
	Магазин				
	A	B	C	D	
I	0	5	4	2	30
II	2	5	0	3	50
III	3	2	0	5	120
Потребность	40	30	20	10	

3.13

Торговый склад	Транспортные издержки				Предложение
	Магазин				
	A	B	C	D	
I	5	6	1	4	80
II	8	0	6	5	320
III	5	4	3	0	100
Потребность	250	100	150	50	

3.14

Торговый склад	Транспортные издержки				Предложение
	Магазин				
	A	B	C	D	
I	3	0	0	6	140
II	5	2	3	1	160
III	1	1	2	4	150
Потребность	50	70	130	150	

3.15

Торговый склад	Транспортные издержки				Предложение
	Магазин				
	A	B	C	D	
I	4	7	1	1	100
II	5	0	3	4	50
III	3	0	2	8	70
Потребность	10	80	90	20	

3.16

Торговый склад	Транспортные издержки				Предложение
	Магазин				
	A	B	C	D	
I	4	1	2	3	100
II	3	6	0	4	200
III	0	2	3	5	150
Потребность	40	60	100	50	

3.17

Торговый склад	Транспортные издержки				Предложение
	Магазин				
	A	B	C	D	
I	4	3	2	0	400
II	10	10	4	7	200
III	12	0	11	5	100
Потребность	300	150	100	200	

3.18

Торговый склад	Транспортные издержки				Предложение
	Магазин				
	A	B	C	D	
I	3	0	2	1	200
II	2	3	0	4	70
III	5	8	7	3	80
Потребность	20	40	80	60	

3.19

Торговый склад	Транспортные издержки				Предложение
	Магазин				
	A	B	C	D	
I	2	7	4	3	40
II	5	0	12	7	30
III	8	1	0	13	50
Потребность	10	20	40	60	

Задание 3.20. Решите задачу венгерским методом.

Торговый агент	Сумма выручки, полученная торговым агентом с торговой точки в день, тыс. руб.			
	Торговая точка			
	1	2	3	4
1	18	20	19	11
2	14	17	19	26
3	16	15	13	11
4	10	13	12	14

Необходимо закрепить торговых агентов за торговыми точками так, чтобы общая ежедневная выручка была максимальной.

Задание 3.21. Решите задачу о назначениях

База	Расстояние до потребителя			
	I	II	III	IV
A	3	8	3	10
B	8	7	2	9
C	6	4	2	7
D	8	4	2	3
E	9	10	6	9

Задание 3.22. Решите задачу о назначениях

База	Расстояние до потребителя			
	I	II	III	IV
A	3	9	2	3
B	6	1	5	6
C	9	4	7	10
D	2	5	4	2
E	9	6	2	4

Задание 3.23. Решите задачу о назначениях.

Администрация деревоперерабатывающего предприятия приняла на работу 4 человека. Каждый из них имеет различные способности и навыки и затрачивает различное время на выполнение определенной работы. В настоящее время необходимо выполнить 4 вида работ. Время выполнения работы каждым работником приведено в таблице.

Требуется назначить на каждый вид работы одного из работников. Как это нужно сделать, чтобы общее время, необходимое для завершения всех видов работ, было минимальным?

Найти оптимальное и альтернативное решения.

Работник	Время выполнения работы, ч			
	Работа			
	1	2	3	4
M1	3	7	5	8
M2	2	4	4	5
M3	4	7	2	8
M4	9	7	3	8

Задание 3.24. Рассмотреть задачу распределения четырех рабочих по четырем станкам. Соответствующие коэффициенты стоимости

в долларах приведены в таблице. Рабочий 1 не может работать на станке 3, а рабочий 3 – на станке 4. Найти решение.

Работник	Время выполнения работы, ч			
	Станки			
	С1	С2	С3	С4
Р1	5	5	0	3
Р2	7	4	2	3
Р3	9	3	5	0
Р4	7	2	6	7

Задание 3.25. Пусть в задании 3.24 введен еще один станок. Соответствующие коэффициенты стоимости (в долларах) для четырех рабочих равны 2, 1, 2 и 8. Этот новый станок может заменить любой из четырех, если такая замена экономически оправдана. Сформулируйте задачу как задачу о назначениях и найдите оптимальное решение. Оправдана ли экономически замена одного из станков? Если да, то какого?

Задание 3.26. Решите задачу оптимального исследования рынка в четырех городах, если задана матрица успешных опросов:

Рынки	Города			
	А	Б	В	Г
1	8	12	10	2
2	4	7	9	10
3	6	5	3	11
4	1	3	2	4

Задание 3.27. Решите задачу оптимального исследования рынка в трех городах, если в каждом из городов предполагается проводить по 10 опросов. Матрица вероятностей успешных опросов:

Рынки	Города		
	А	Б	В
1	0,3	0,2	0,2
2	0,1	0,4	0,1
3	0,2	0,5	0,1

Задание 3.28. Решить задачу оптимального использования трех торговых агентов в трех городах, если задана матрица покупательных способностей с ij, реализуемых i-м агентом в j-м городе.

Города	Агенты		
	A1	A2	A3
C1	200	270	360
C2	180	240	330
C3	210	300	300

Задание 3.29. Компания разрабатывает план выпуска трех новых видов продукции и владеет 5 предприятиями, на трех из них должны производиться новые виды продукции – по одному виду на одно предприятие. При этом известны:

– издержки производства и сбыта единицы продукции, руб.

Вид продукции	Предприятие				
	1	2	3	4	5
1	20	23	38	15	35
2	8	29	6	35	35
3	5	8	3	4	7

– издержки сбыта единицы продукции, руб.

Вид продукции	Предприятие				
	1	2	3	4	5
1	20	50	20	10	13
2	7	90	8	35	60
3	5	5	4	15	6

– плановый объем годового производства, который позволил бы удовлетворить спрос и плановая стоимость единицы продукции каждого вида:

Вид продукции	Плановый объем производства	Плановая стоимость, руб.
1	35 000	55
2	160 000	50
3	54 000	30

Рассчитайте оптимальный план производства на основе задачи о назначениях.

Глава 4. МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Задачи нелинейного программирования формулируются так же, как и общая задача оптимального программирования со следующими требованиями к целевой функции и допустимой области: целевая функция $f(\overline{X}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ или (и) хотя бы одна из функций $g_i(x_1, x_2 \dots, x_n)$, $i = \overline{1, m}$ являются нелинейными.

У произвольной задачи нелинейного программирования некоторые или все свойства ЗЛП отсутствуют. Вследствие этого задачи нелинейного программирования несравненно сложнее ЗЛП и для них не существует общего универсального метода решения (аналогичного симплексному методу).

4.1. Задачи и методы динамического программирования

Весьма полезным вычислительным методом для решения некоторых типов задач нелинейного программирования является метод *динамического программирования* (ДП). При решении задачи этим методом процесс решения расчленяется на этапы, решаемые последовательно во времени и приводящие в конечном счете к искомому решению. Типичные особенности многоэтапных (многошаговых) задач, решаемых методом динамического программирования, состоят в следующем:

– процесс перехода производственно-экономической системы из одного состояния в другое должен быть марковским (процессом с отсутствием последействия). Это означает, что если система находится в некотором состоянии $S^n \in S_n$, то дальнейшее развитие процесса зависит только от данного состояния и не зависит от того, каким путем система приведена в это состояние;

– процесс длится определенное число шагов *N,* на каждом шаге осуществляется выбор одного управления u^n, под воздействием которого система переходит из одного состояния S^n в другое S^{n+1}:

$S^n \underset{\rightarrow}{u^n} S^{n+1}$. Поскольку процесс марковский, то $u^n = u^n\left(S^n\right)$ зависит только от текущего состояния;

– каждый шаг (выбор очередного решения) связан с определенным эффектом, который зависит от текущего состояния и принятого решения: $\varphi_n\left(S^n, u^n\right)$;

– общий эффект (доход) за N шагов слагается из доходов на отдельных шагах, т. е. критерий оптимальности должен быть аддитивным (или приводящимся к нему).

Требуется найти такое решение u^n для каждого шага $(n = 1,2,3, \ldots, N)$, т. е. последовательность $\left(u^1, \ldots, u^N\right)$, чтобы получить максимальный эффект (доход) за N шагов.

Любая возможная допустимая последовательность решений $\left(u^1, \ldots, u^N\right)$ называется *стратегией управления*. Стратегия управления, доставляющая максимум критерию оптимальности, называется оптимальной.

В основе общей концепции метода ДП лежит *принцип оптимальности Беллмана*: оптимальная стратегия обладает таким свойством, что независимо от того, каким образом система оказалась в рассматриваемом конкретном состоянии, последующие решения должны составлять оптимальную стратегию, привязывающуюся к этому состоянию. Математически этот принцип записывается в виде *рекуррентного соотношения ДП (РДП)*:

$$f_n\left(S^n\right) = max\left\{\varphi_n\left(S^n, u^n\right) + f_{n-1}\left(S^{n-1}, u^n\right)\right\}$$
$$u^n \in u^n\left(S^n\right), S_n \in S_n,$$

где $f_n\left(S^n\right)$ – эффект за оставшиеся n шагов; $u^n\left(S^n\right)$ – все допустимые управления при условии, что система находится в состоянии S^n; $\varphi_n\left(S^n, u^n\right)$ – эффект от принятия решения u^n.

Благодаря принципу оптимальности удается при последующих переходах испытывать не все возможные варианты, а лишь оптимальные выходы. РДП позволяет заменить трудоемкое вычисление оптимума по N переменных в исходной задаче решением N задач, в каждой из которых оптимум находится лишь по одной переменной.

Существует очень много практически важных задач, которые ставятся и решаются как задачи ДП (задачи о замене оборудования, о ранце распределения ресурсов и т. д.).

4.2. Сетевые графики динамических задач

Сетевой моделью (другие названия: *сетевой график, сеть)* называется экономико-математическая модель, отражающая комплекс работ (операций) и событий, связанных с реализацией некоторого проекта (научно-исследовательского, производственного и др.), в их логической и технологической последовательности и связи.

Анализ сетевой модели, представленной в графической или табличной (матричной) форме, позволяет, во-первых, более чётко выявить взаимосвязи этапов реализации проекта и, во-вторых, определить наиболее оптимальный порядок выполнения этих этапов в целях, например, сокращения сроков выполнения всего комплекса работ.

Таким образом, метод сетевого моделирования относится к методам принятия оптимальных решений.

Математический аппарат сетевых моделей базируется на теории графов. *Графом* называется совокупность двух конечных множеств: множества точек, которые называются *вершинами,* и множества пар вершин, которые называются *ребрами.* Если рассматриваемые пары вершин являются упорядоченными, т. е. на каждом ребре задается направление, то граф называется *ориентированным;* в противном случае – *неориентированным.* Последовательность неповторяющихся ребер, ведущая от некоторой вершины к другой, образует *путь.* Граф называется *связным,* если для любых двух его вершин существует путь, их соединяющий; в противном случае граф называется *несвязным.* В экономике чаще всего используются два вида графов: дерево и сеть. *Дерево* представляет собой связный граф без циклов, имеющий исходную вершину *(корень)* и крайние вершины; пути от исходной вершины к крайним вершинам называются *ветвями. Сеть* – это ориентированный конечный связный граф, имеющий начальную вершину *(источник)* и конечную вершину *(сток)*. Таким образом, сетевая модель представляет собой граф вида «сеть».

В экономических исследованиях сетевые модели возникают при моделировании экономических процессов методами *сетевого планирования и управления* (СПУ). Объектом управления в системах сетевого планирования и управления являются коллективы исполнителей, располагающих определенными ресурсами и выполняющих определенный комплекс операций, который призван обеспечить достижение намеченной цели, например разработку нового изделия, строительства объекта и т.п.

Основой СПУ (*сетевого планирования и управления*) является сетевая модель (СМ), в которой моделируется совокупность взаимосвязанных работ и событий, отображающих процесс достижения определенной цели. Она может быть представлена в виде графика или таблицы.

Основные понятия СМ: событие, работа и путь. На рис. 4.1. графически представлена СМ, состоящая из 11 событий и 16 работ, продолжительность выполнения которых указана над работами.

Работа характеризует материальное действие, требующее использования ресурсов, или логическое, требующее лишь взаимосвязи событий. При графическом представлении работа изображается стрелкой, которая соединяет два события. Она обозначается парой заключенных в скобки чисел (i, j), где i – номер события, из которого работа выходит, а j – номер события, в которое она входит. Работа не может начаться раньше, чем свершится событие, из которого она выходит. Каждая работа имеет определенную продолжительность $t\ (i,j)$. Например, запись $t\ (2,5) = 4$ означает, что работа (2,5) имеет продолжительность 4 единицы. К работам относятся также процессы, которые не требуют ни ресурсов, ни времени выполнения. Они заключаются в установлении логической взаимосвязи работ и показывают, что одна из них непосредственно зависит от другой. Такие работы называются *фиктивными* и на графике изображаются пунктирными стрелками (см. работу (6,9) рис. 4.1).

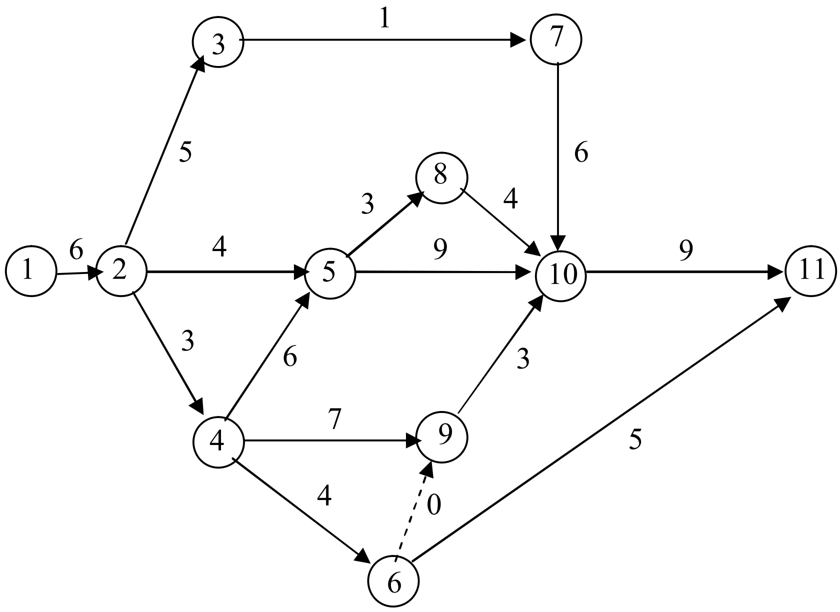


Рис. 4.1. Сетевая модель

Событиями называются результаты выполнения одной или нескольких работ. Они не имеют протяженности во времени. Событие свершается в тот момент, когда оканчивается последняя из работ, входящая в него. События обозначаются одним числом и при графическом представлении СМ изображаются кружком (или иной геометрической фигурой), внутри которого проставляется его порядковый номер (i = 1, 2, ..., *N)*. В СМ имеется начальное событие (с номером 1), из которого работы только выходят, и конечное событие (с номером *N),* в которое работы только входят.

Путь – это цепочка следующих друг за другом работ, соединяющих начальную и конечную вершины. Например, в приведенной выше модели путями являются L_1 = (1, 2, 3, 7, 10, 11), L_2 – (1, 2, 4, 6, 11) и др. Продолжительность пути определяется суммой продолжительностей составляющих его работ. Путь, имеющий максимальную длину, называют *критическим* и обозначают L_{KP}, а его продолжительность – t_{KP}. Работы, принадлежащие критическому пути, называются критическими. Их несвоевременное выполнение ведет к срыву сроков всего комплекса работ.

СМ имеют ряд характеристик, которые позволяют определить степень напряженности выполнения отдельных работ, а также всего их комплекса и принять решение о перераспределении ресурсов.

Для событий рассчитывают три характеристики: ранний и поздний срок совершения события, а также его резерв.

Ранний срок $t_p(j)$ свершения события определяется величиной наиболее длительного пути от исходного до рассматриваемого события, причем $t_p(1) = 0$, а $t_p(N) = t_{кр}(L)$:

$$t_P(j) = \max_j \{t_P(i) + t(i,j)\}; \quad j = \overline{2,N}. \tag{4.1}$$

Поздний срок свершения события характеризует самый поздний допустимый срок, к которому должно совершиться событие, не вызывая при этом срыва срока свершения конечного события:

$$t_П(i) = \min_i \{t_П(\mathrm{j}) - t(i,j)\}; \quad j = \overline{2,N-1}. \tag{4.2}$$

Этот показатель определяется «обратным ходом», начиная с завершающего события, с учетом соотношения $t_П(\mathrm{N}) = t_P(N)$.

Все события, за исключением событий, принадлежащих критическому пути, имеют резерв $R(i)$:

$$R(i) = t_П(i) - t_P(i). \tag{4.3}$$

Резерв показывает, на какой предельно допустимый срок можно задержать наступление этого события, не вызывая при этом увеличение срока выполнения всего комплекса работ.

Для оптимизации сетевой модели, выражающейся в перераспределении ресурсов с ненапряжённых работ на критические для ускорения их выполнения, необходимо как можно более точно оценить степень трудности своевременного выполнения всех работ, а также «цепочек» пути. Более точным инструментом решения этой задачи по сравнению с полным резервом является коэффициент напряженности, который может быть вычислен одним из двух способов по приведенной ниже формуле:

$$K_н(i,j) = \frac{t(L_{max}) - t_{кр}{'}}{t_{кр} - t_{кр}{'}} = 1 - \frac{R_п(i,j)}{t_{кр} - t_{кр}{'}}, \tag{4.4}$$

где $t(L_{max})$ – продолжительность максимального пути, проходящего через работу (i,j); $R_п(i,j)$ – полный резерв времени, $t_{кр}{'}$ – продолжительность отрезка рассматриваемого пути, совпадающего с критическим путем.

Согласно вышесказанному, заполним табл. 4.1 по рис. 4.1. Причем вначале заполняем t_P, а затем $t_П$, с учетом того, что $t_П(\mathrm{N}) = t_P(N)$.

Таблица 4.1

Пример решения задачи сетевой модели

Номер события	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
t_p	0	6	11	9	15	13	12	18	16	24	33
t_n	0	6	17	9	15	21	18	20	21	24	33
R	0	0	6	0	0	8	6	2	5	0	0
$K_н(i,j)$											

Заполняем раннее время. При этом мы идем из более ранних событий в более поздние (т.е. от меньших чисел к большим).

Событие 1. Из него всё начинается, продолжительность – 0.

Событие 2. В событие 2 можно попасть единственным путем – 6.

Событие 3. В событие 3 можно попасть единственным путем – 6+5=11.

Событие 4. В событие 4 можно попасть единственным путем – 6+3=9.

Событие 5. В событие 5 можно попасть по пути 1-2-5, что составит время t5=6+4=10. Либо по пути 1-2-4-5, что составит время t5=6+3+6=15. Берем наибольшее – 15.

Событие 6. В событие 6 можно попасть единственным путем – 6+3+4=13.

Событие 7. В событие 7 можно попасть единственным путем – 6+5+1=12.

Событие 8. В событие 8 можно попасть путем – 6+4+3=13 и путём 6 + 3 + 6 + 3 = 18. Выбираем наибольшее – 18.

Событие 9. В событие 9 можно попасть единственным путем – 6+3+7=16.

Событие 10. В событие 10 можно попасть пятью путями:

1-2-3-7-10=18;

1-2-5-8-10=17;

1-2-4-5-10=24;

1-2-4-9-10=19;

1-2-5-10=19.

Выбираем наибольший – 24.

Событие 11. В событие 11 можно попасть из события 10, при этом время будет 24+9=33, и из события 6, при этом время будет 13+5=18. Выбираем наибольшее 33.

Далее заполняем позднее время – t_n. При этом мы идем от больших номеров к меньшим.

В графу 11 записываем значение 33, согласно tП(N) = tP(N).

Событие 10. Обратным ходом в него можно попасть только из события 11. Следовательно, tП(10)= tП(11)-9=33-9=24.

Событие 9. В событие 9 обратным ходом можно попасть только из события 10. Следовательно, tП(9)= tП(10)-3=24-3=21.

Событие 8. В событие 8 обратным ходом можно попасть только из события 10. Поэтому время 24-4=20.

Событие 7. В событие 7 обратным ходом можно попасть только из события 10. Поэтому время 24-6=18.

Событие 6. В событие 6 обратным ходом можно попасть из события 11 – tП(6)=33–5=28 или из события 9 – tП(6)= tП(9)–0=21. Теперь выбираем наименьшее время – tП(6)=21.

Событие 5. В событие 5 обратным ходом можно попасть из события 10, время 24–9=15, и из события 8, время 20-3=17. Выбираем меньшее – 15.

Событие 4. В событие 4 можно попасть из 5-го, 9-го и 6-го. При этом времена будут: 9, 14, 17. Выбираем наименьшее – 9.

Событие 3. В событие 3 обратным ходом можно попасть из события 7, время 18–1=17.

Событие 2. В событие 2 обратным ходом можно попасть из события 5 – время 15-4=11; из события 4 – время 9-3=6; из события 3 – время 17–5=12. Выбираем наименьшее – 6.

Теперь заполним резерв времени – $R = t_n - t_p$.

Критические события это те – где резерв времени равен нулю R=0. В нашем случае это события 1-2-4-5-10-11. Следовательно, критический путь проходит через критические события, поэтому критический путь 1-2-4-5-10-11. Его длина, т.е. критическое время – $t_{Кр}$=33.

Для критического пути (1,2), (2,4), (4,5), (5,10), (10,11) резерв времени = 0 и коэффициент напряженности, согласно формуле (4.4), $К_Н$ =1. Для других работ подсчитаем. Выясним более подробно смысл величин $t(L_{max})$ и $t_{кр}{}'$ на конкретном примере. Пусть нам надо определить эти параметры для пути, содержащего работу (5,8). На рис. 4.2 показан критический путь, его длительность $t_{КР} = 33$, наибольший путь, содержащий работу (5,8), его длительность $t(L_{max}) = 6 + 3 + 6 + 3 + 4 + 9 = 31$. Длительность совпадающих участков красного и синего и есть $t_{кр}{}'$, и она равна $t_{кр}{}' = 6 + 3 + 6 + 9 = 24$. Следовательно, напряжённость работы (5,8) равна:

$$K_н(i,j) = \frac{t(L_{max}) - t_{кр}{}'}{t_{кр} - t_{кр}{}'} = K_н(5{,}8) = \frac{31-24}{33-24} = \frac{7}{9} = 0{,}78.$$

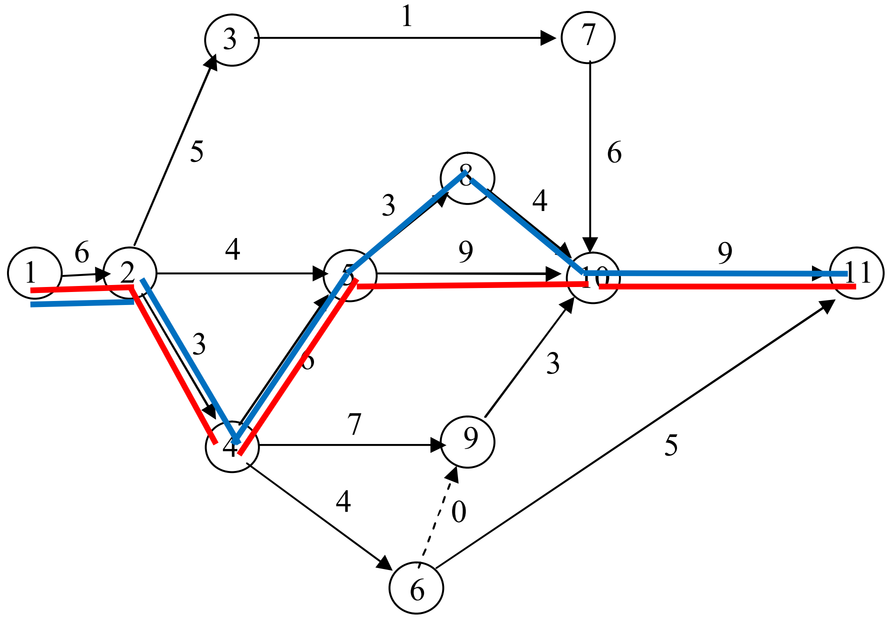


Рис. 4.2. Сетевая модель

Аналогично можно посчитать, например, и напряжённость работы (4,9)

$$K_н(i,j) = \frac{t(L_{max}) - t_{кр}{}'}{t_{кр} - t_{кр}{}'} = K_н(4{,}9) =$$

$$= \frac{6+3+7+3+9-(6+3+9)}{33-(6+3+9)} = \frac{28-18}{33-18} = \frac{10}{15} = 0{,}67.$$

Или (2,3):

$$K_н(i,j) = \frac{t(L_{max}) - t_{кр}{}'}{t_{кр} - t_{кр}{}'} = K_н(2{,}3) =$$

$$= \frac{6+5+1+6+9-(6+9)}{33-(6+9)} = \frac{27-15}{33-15} = \frac{12}{18} = 0{,}67.$$

Теперь мы можем заполнить строку $K_н(i,j)$ таблицы 4.1. При этом Кн удобно считать по формуле (4.4):

$$K_н(i,j) = 1 - \frac{R_n(i,j)}{t_{кр} - t_{кр}{}'}.$$

Ясно, что коэффициент напряженности, где R=0, будет равен Кн=1.

Далее точка 3. В эту точку работа может совершиться только из точки 2. Поэтому для этой точки коэффициент напряженности $K_н(2{,}3)$, для него длина совпадающего участка будет равна $t_{кр}{}' = 6 + 9 = 15$. Тогда

$$K_н(2{,}3) = 1 - \frac{6}{33-15} = 0{,}67\,.$$

Далее точка 6. В эту точку работа может совершиться только из точки 4. Поэтому для этой точки коэффициент напряженности $K_н(4{,}6)$, для него $t_{кр}{}' = 6 + 3 + 9 = 18$, следовательно

$$K_н(4{,}6) = 1 - \frac{8}{33-18} = 0{,}47\,.$$

Далее точка 7. В эту точку работа может совершиться только из точки 3. Поэтому для этой точки коэффициент напряженности $K_н(3{,}7)$, для него $t_{кр}{}' = 6 + 9 = 15$, следовательно

$$K_н(3{,}7) = 1 - \frac{6}{33-15} = 0{,}67\,.$$

Далее точка 8. В эту точку работа может совершиться только из точки 3. Поэтому для этой точки коэффициент напряженности $K_н(3{,}7)$, для него $t_{кр}{}' = 6 + 9 = 15$, следовательно

$$K_н(3{,}7) = 1 - \frac{6}{33-15} = 0{,}67\,.$$

И последняя точка 9. В эту точку работа может совершиться только из точки 4. Поэтому для этой точки коэффициент напряженности $K_н(4{,}9)$, для него $t_{кр}{}' = 6 + 3 + 9 = 18$, следовательно

$$K_н(3{,}7) = 1 - \frac{5}{33 - 18} = 0{,}67\,.$$

Таким образом, табл. 4.1 примет окончательный вид:

Номер события	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
t_p	0	6	11	9	15	13	12	13	16	24	33
t_n	0	6	17	9	15	21	18	20	21	24	33
R	0	0	6	0	0	8	6	7	5	0	0
$К_Н$	1	1	0,67	1	1	0,47	0,67	0,67	0,67	1	1

На основании значения коэффициента $К_Н$ все работы СМ могут быть разделены на три группы:

напряжённые $K_н(i,j) > 0{,}8$;

подкритические $0{,}6 < K_н(i,j) > 0{,}8$;

резервные $K_н(i,j) < 0{,}6$.

В результате перераспределения ресурсов стараются максимально уменьшить общую продолжительность работ, что возможно при переводе всех работ в первую группу.

В нашем случае оптимизация СМ возможна в основном за счёт оптимизации резервной работы (4,6).

Отметим, что можно посчитать коэффициент напряженности и для всех других работ и принять более обоснованное решение.

Для всех работ (i, j) на основании ранних и поздних сроков свершения всех событий можно определить показатели:

Ранний срок начала $\quad t_{рн}(i,j) = t_p(i)$. (4.5)

Ранний срок окончания $\quad t_{ро}(i,j) = t_p(i) + t(i,j)$. (4.6)

Поздний срок окончания $\quad t_{по}(i,j) = t_n(i)$. (4.7)

Поздний срок начала $\quad t_{пн}(i,j) = t_n(j) - t(i,j)$. (4.8)

Полный резерв времени

$$R_n(i,j) = t_n(j) - t_p(i) - t(i,j) =$$
$$t_{пн}(i,j) - t_p(i) = t_n(j) - t_{ро}(i,j)\,. \quad (4.9)$$

Полный резерв времени показывает, насколько можно увеличить время выполнения конкретной работы при условии, что срок выполнения всего комплекса не изменится.

Путь характеризуется двумя показателями – продолжительностью и резервом. Продолжительность пути определяется суммой продолжительностей составляющих его работ. Резерв определяется как разность между длинами критического и рассматриваемого путей. Из этого определения следует, что работы, лежащие на критическом пути, и сам критический путь имеют нулевой резерв времени. Резерв времени пути показывает, насколько может увеличиться продолжительность работ, составляющих данный путь, без изменения продолжительности общего срока выполнения всех работ.

Табличная модель сетевого графика представлена в табл. 4.2.

Таблица 4.2

Модель сетевого графика

	(i, j)	$t(i,j)$	$t_{рн}(i,j)=$ $=t_р(i)$	$t_{ро}(i,j)=$ $t_р(i)+t(i,j)$	$t_{пн}(i,j)$	$t_{по}(i,j)=$ $=t_п(j)$	$R_п$	$К_н$
1	2	3	4	5=4+3	6=7-3	7	8=6-4=7-5	9
1	(1,2)	6	0	6	0	6	0	1
2	(2,3)	5	6	11	12	17	6	0,67
3	(2,4)	3	6	9	6	9	0	1
4	(2,5)	4	6	10	11	15	5	0,44
5	(3,7)	1	11	12	17	18	6	0,67
6	(4,5)	6	9	15	9	15	0	1
7	(4,6)	4	9	13	17	21	8	0,47
8	(4,9)	7	9	16	14	21	5	0,67
9	(5,8)	3	15	18	17	20	2	0,78
10	(5,10)	9	15	24	15	24	0	1
11	(6,9)	0	13	13	21	21	8	0,38
12	(6,11)	5	13	18	28	33	15	0,38
13	(7,10)	6	12	18	18	24	6	0,67
14	(8,10)	4	18	22	20	24	2	0,78
15	(9,10)	3	16	19	21	24	5	0,67
16	(10,11)	9	24	33	24	33	0	1

Колонка 2 – всевозможные работы, исходя из рис. 4.1. Колонка 3 – их длительности, колонка 4 – заполняется так же, как в табл. 4.1, строка $t_р$ по первому событию (i), колонка 7 заполняется так же, как и строка $t_п$ в табл. 4.1 по второму событию (j). Заполнение колонок 5 и 6 показано в самой табл. 4.2. Колонка 8 есть разность колонок 6 и 4 либо 7 и 5, согласно формуле (4.7).

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

Задания 4.1 – 4.4.

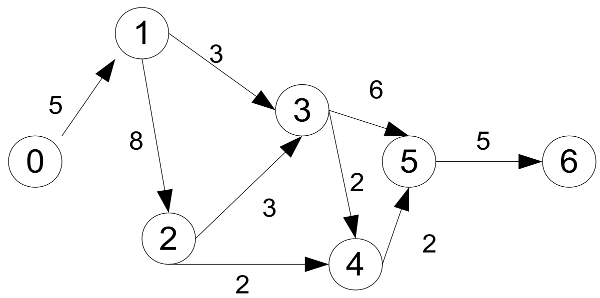
Рассчитать параметры сетевого графика.

Выделить критический путь и найти его длину.

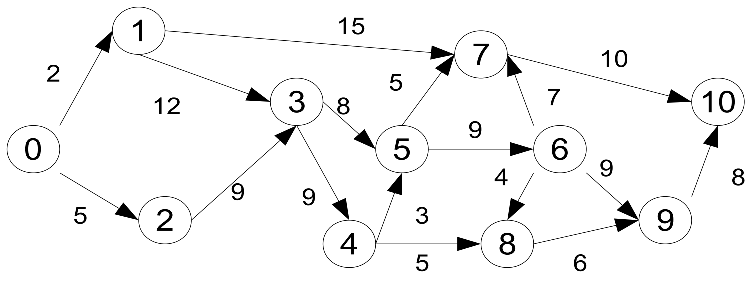
Определить резервы времени каждого события.

Определить резервы времени всех работ и коэффициент напряженности работы предпоследней работы.

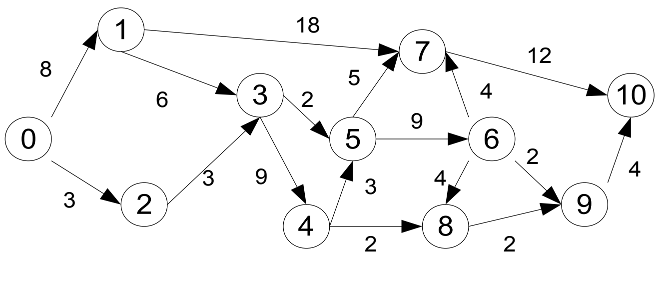
4.1.



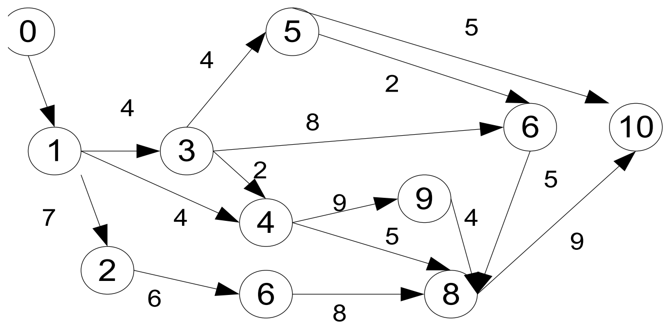
4.2.



4.3.



4.4.



4.5. Изобразите граф сетевой модели, заданной параметрами:

(i, j)	1, 2	1, 3	1, 4	2, 4	2, 5	2, 6	3, 4	3, 5	3, 8	4, 5	5, 7	6, 7	6, 8	7, 8
$T(i, j)$	3	4	1	4	5	4	1	5	6	4	4	3	2	2

4.6. Изобразите граф сетевой модели, заданной параметрами.

(i, j)	1, 2	2, 3	2, 4	2, 5	2, 7	3, 7	4, 5	5, 6	6, 7	6, 8	8, 9	7,9
$T(i, j)$	4	3	5	1	8	3	5	5	9	6	8	5

4.7. Изобразите граф сетевой модели, заданной параметрами.

(i, j)	1, 2	1, 3	2, 3	2, 4	3, 4	4, 5	4, 6	4, 7	5, 8	6, 9	7, 11	8, 10	9, 11	10,11
$T(i, j)$	6	7	8	9	5	4	6	5	6	7	9	3	5	7

Задание 4.8. Пусть для некоторого комплекса работ установлена оценка для каждой работы на уровне нормативных продолжительностей и срочного режима, а также дана стоимость. Информация представлена в таблице.

Работа	Нормативный режим		Срочный режим	
	Продолжительность, дни	Стоимость, руб.	Продолжительность, дни	Стоимость, руб.
1, 2	3	6	2	11
1, 3	5	8	3	12
1, 4	4	7	8	9
2, 5	10	25	8	30
3, 5	8	20	6	24
3, 6	15	26	12	30
4, 6	13	24	10	30
5, 7	3	15	6	25
6, 7	4	10	3	15

Построить график данного комплекса работ и рассчитать:

– временные характеристики сетевого графика при нормальном режиме работ; найти критический путь; полные резервы времени;

– временные характеристики сетевого графика при срочном режиме работ; найти критический путь; полные резервы времени; определить стоимость работ.

Задание 4.9. Пусть для некоторого комплекса работ установлена оценка для каждой работы на уровне нормативных продолжительностей и срочного режима, а также дана стоимость. Информация представлена в таблице.

Работа	Нормативный режим		Срочный режим	
	Продолжительность, дни	Стоимость, руб.	Продолжительность, дни	Стоимость, руб.
1, 2	5	3	4	5
1, 3	8	4	6	6
2, 4	6	9	4	6
2, 5	15	15	10	20
3, 5	8	12	6	8
4, 6	12	6	10	25
4, 7	10	12	7	8
5, 7	3	5	2	3
6, 7	4	10	3	8

Построить график данного комплекса работ и рассчитать:

– временные характеристики сетевого графика при нормальном режиме работ; найти критический путь; полные резервы времени;

– временные характеристики сетевого графика при срочном режиме работ; найти критический путь; полные резервы времени; определить стоимость работ.

Глава 5. СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

При исследовании операций часто приходится сталкиваться с системами, предназначенными для многоразового использования при решении однотипных задач. Возникающие при этом процессы получили название процессов обслуживания, а системы – систем массового обслуживания (СМО). Примерами таких систем являются телефонные системы, ремонтные мастерские, вычислительные комплексы, билетные кассы, магазины, парикмахерские и т. д.

Каждая СМО состоит из определенного числа обслуживающих единиц (приборов, устройств, пунктов, станций), которые называются каналами обслуживания. Каналами могут быть линии связи, рабочие точки, вычислительные машины, продавцы и др. По числу каналов СМО подразделяются на одноканальные и многоканальные.

Заявки поступают в СМО обычно нерегулярно, а случайно, образуя так называемый случайный поток заявок (требований). Обслуживание заявок, вообще говоря, также продолжается какое-то случайное время. Случайный характер потока заявок и времени обслуживания приводит к тому, что СМО оказывается загруженной неравномерно: в какие-то периоды времени скапливается очень большое число заявок (они либо становятся в очередь, либо покидают СМО необслуженными), в другие же периоды СМО работает с недогрузкой или простаивает.

Предметом теории массового обслуживания является построение математических моделей, связывающих заданные условия работы СМО (число каналов, их производительность, характер потока заявок и т. п.) с показателями эффективности СМО, описывающими ее способность справляться с потоками заявок.

В качестве показателей эффективности СМО используют: среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени; среднее число заявок в очереди; среднее время ожидания обслуживания; вероятность отказа в обслуживании без ожидания; вероятность того, что число заявок в очереди превысит определенное значение и т. п.

СМО делятся на два основных типа (класса): СМО с отказами и СМО с ожиданием (очередью). В СМО с отказами заявка, поступившая в момент, когда все каналы заняты, получает отказ, покидает СМО и в дальнейшем процессе обслуживания не участвует (например, заявка на телефонный разговор в момент, когда все каналы заняты, покидает СМО не обслуженной). В СМО с ожиданием заявка, пришедшая в момент, когда все каналы заняты, не уходит, а становится в очередь на обслуживание.

СМО с ожиданием подразделяются на разные виды в зависимости от того, как организована очередь: с ограниченной или неограниченной длиной очереди, с ограниченным временем ожидания и т. п.

Для классификации СМО важное значение имеет дисциплина обслуживания, определяющая порядок выбора заявок из числа поступивших и порядок распределения их между свободными каналами. По этому признаку обслуживание заявок может быть организовано по принципу «первая пришла – первая обслужена» (такой порядок может применяться, например, при извлечении для обслуживания изделий со склада, ибо последние из них оказываются часто более доступными) или обслуживание с приоритетом (когда в первую очередь обслуживаются наиболее важные заявки). Приоритет может быть как абсолютным, когда более важная заявка «вытесняет» из-под обслуживания обычную заявку (например, в случае аварийной ситуации плановые работы ремонтных бригад прерываются до ликвидации аварии), так и относительным, когда более важная заявка получает лишь «лучшее» место в очереди.

Под потоком событий понимают последовательность однородных событий, следующих одно за другим в какие-то случайные моменты времени (например, поток вызовов на телефонной станции, поток отказов ЭВМ, поток покупателей и т. п.).

Поток характеризуется интенсивностью λ – частотой появления событий или средним числом событий, поступающих в СМО в единицу времени.

Поток событий называется регулярным, если события следуют одно за другим через определенные равные промежутки времени. Например, поток изделий на конвейере сборочного цеха (с постоянной скоростью движения) является регулярным.

Поток событий называется стационарным, если его вероятностные характеристики не зависят от времени. В частности, интенсивность стационарного потока есть величина постоянная: $\lambda(t)=\lambda$. Например, поток автомобилей на городском проспекте является стационарным, но этот поток можно считать нестационарным в течение суток.

Поток событий называется потоком без последействия, если для любых двух непересекающихся участков времени τ_1 и τ_2 число событий, попадающих на один из них, не зависит от числа событий, попадающих на другие. Например, поток пассажиров, входящих в метро, практически не имеет последействия. А, скажем, поток покупателей, отходящих с покупками от прилавка, уже имеет последействие (хотя бы потому, что интервал времени между отдельными покупателями не может быть меньше, чем минимальное время обслуживания каждого из них).

Поток событий называется ординарным, если вероятность попадания на малый (элементарный) участок времени Δt двух и более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания одного события. Другими словами, поток событий ординарен, если события появляются в нем поодиночке, а не группами. Например, поток поездов, подходящих к станции, ординарен, а поток вагонов неординарен.

Поток событий называется простейшим (или стационарным пуассоновским), если он одновременно стационарен, ординарен и не имеет последействия. Название «простейший» объясняется тем, что СМО с простейшими потоками имеет наиболее простое математическое описание.

Простейший поток в качестве предельного возникает в теории случайных процессов столь же естественно, как в теории вероятностей нормальное распределение получается в качестве предельного для суммы случайных величин.

Рассмотрим на оси времени Ot (рис. 5.1) простейший поток событий как неограниченную последовательность случайных точек. Показано, что для простейшего потока число m событий (точек), попадающих на произвольный участок времени τ, распределено по закону Пуассона:

$$P_m(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^m}{m!} e^{-\lambda\tau}, \tag{5.1}$$

для которого математическое ожидание a случайной величины равно ее дисперсии $D = \sigma^2$: $a = \sigma^2 = \lambda\tau$.

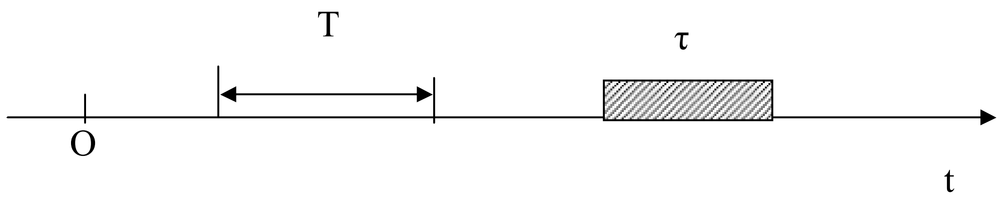


Рис. 5.1. Ось времени с простейшим потоком событий

В частности, вероятность того, что за время τ не произойдет ни одного события ($m = 0$), равна

$$P_0(\tau) = e^{-\lambda\tau} . \tag{5.2}$$

Найдем распределение интервала времени T между двумя произвольными соседними событиями простейшего потока. В соответствии с (5.2) вероятность того, что на участке времени длиной t не появится ни одного из последующих событий, составляет:

$$P(T \geq t) = e^{-\lambda t} , \tag{5.3}$$

а вероятность противоположного события, т. е. функция распределения случайной величины T, есть

$$F(T) = 1 - P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t} . \tag{5.4}$$

Плотность вероятности случайной величины есть производная ее функции распределения, т. е. (рис. 5.2):

$$\varphi(t) = F'(t) = \lambda e^{-\lambda t} . \tag{5.5}$$

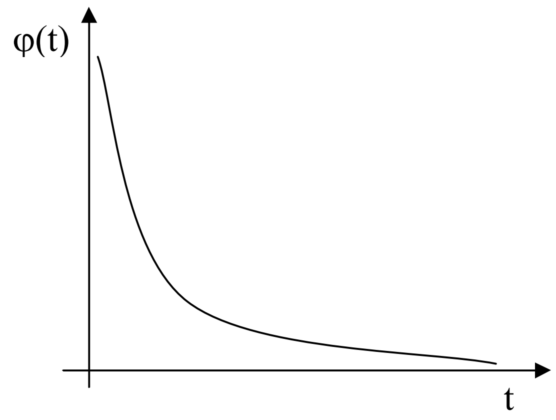


Рис. 5.2. График плотности вероятности

Распределение, задаваемое плотностью вероятности (5.5) или функцией распределения (5.4), называется показательным или экспоненциальным. Таким образом, интервал времени между двумя соседними произвольными событиями имеет показательное распределение, для которого математическое ожидание равно среднему квадратическому отклонению случайной величины:

$$a = \sigma = \frac{1}{\lambda} \tag{5.6}$$

и обратно по величине интенсивности потока.

Важнейшее свойство показательного распределения (присущее только показательному распределению) состоит в следующем: если промежуток времени, распределенный по показательному закону, уже длился некоторое время τ, то это никак не влияет на закон распределения оставшейся части промежутка $(T - \tau)$: он будет таким же, как и закон распределения всего промежутка T.

Другими словами, для интервала времени T между двумя последовательными соседними событиями потока, имеющего показательное распределение, любые сведения о том, сколько времени длился этот интервал, не влияют на закон распределения оставшейся части. Это свойство показательного закона распределения представляет собой, в сущности, другую формулировку «для отсутствия последействия» – основного свойства простейшего потока.

Для простейшего потока с интенсивностью λ вероятность попадания на элементарный (малый) отрезок времени Δt хотя бы одного события потока равна, согласно (5.4),

$$P_{\Delta t} = P(T < \Delta t) = 1 - e^{-\lambda \Delta t} \approx \lambda \Delta t\,. \tag{5.7}$$

5.1. Системы массового обслуживания с отказами

В качестве показателей эффективности СМО с отказами будем рассматривать такие:

A – абсолютную пропускную способность СМО, т. е. среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени;

Q – относительную пропускную способность, т. е. среднюю долю пришедших заявок, обслуживаемых системой;

$P_{ОТК}$ – вероятность отказа, т. е. того, что заявка покинет СМО необслуженной;

$\overline{k}$ – среднее число занятых каналов (для многоканальной системы).

Одноканальная система с отказами

Рассмотрим задачу. Имеется один канал, на который поступает поток заявок с интенсивностью λ. Поток обслуживания имеет интенсивность μ. При этом мы полагаем, что все потоки событий, переводящие СМО из одного состояния в другое, являются простейшими. К ним относится и поток обслуживания – поток заявок, обслуживаемых одним непрерывно занятым каналом. Среднее время обслуживания $\overline{t}_{об}$ обратно по величине интенсивности μ, т. е. $\overline{t}_{об} = 1/\mu$. Найти предельные вероятности состояний системы и показатели ее эффективности.

Система S (СМО) имеет два состояния: S_0 – канал свободен, S_1 – канал занят. Граф состояния представлен на рис. 5.3.

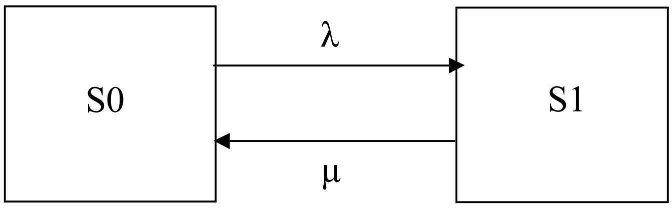


Рис. 5.3. Граф состояния одноканальной СМО

В предельном, стационарном режиме система алгебраических уравнений для вероятностей состояний имеет вид:

$$\begin{cases} \lambda \cdot p_0 = \mu \cdot p_1 \ , \\ \mu \cdot p_1 = \lambda \cdot p_0 \ , \end{cases} \tag{5.8}$$

т. е. система вырождается в одно уравнение. Учитывая нормировочное условие $p_0 + p_1 = 1$, найдем предельные вероятности состояний:

$$p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \quad p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}, \tag{5.9}$$

которые выражают среднее относительное время пребывания системы в состоянии S_0 (когда канал свободен) и S_1 (когда канал занят), т. е. определяют соответственно относительную пропускную способность Q системы и вероятность отказа $P_{ОТК}$:

$$Q = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \tag{5.10}$$

$$P_{ОТК} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}. \tag{5.11}$$

Абсолютную пропускную способность найдем, умножив относительную пропускную способность Q на интенсивность потока отказов:

$$A = \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu}. \tag{5.12}$$

Пример 5.1. Известно, что заявки на телефонные переговоры поступают с интенсивностью $\lambda = 90\ заявок/час$, а средняя продолжительность разговора по телефону $\bar{t}_{об} = 2\ мин.$ Определить показатели эффективности СМО при наличии одного номера.

Решение. Интенсивность потока обслуживания будет равна $\mu = 1/\bar{t}_{об}$ или $\mu = 1/2\left(мин^{-1}\right) = 30\left(час^{-1}\right)$. Согласно (5.10), $Q = 30/(90+30) = 0{,}25$, т. е. в среднем только 25% поступающих заявок осуществят переговоры по телефону. Соответственно, вероятность отказа в обслуживании составит, согласно (5.11), $P_{ОТК} = 90/(90+30) = 0{,}75$. Абсолютная пропускная способность СМО $A = 90 \cdot 30/(90+30) = 22{,}5$, т. е. в среднем в час будут обслужены 22,5 заявки на переговоры. Очевидно, что при наличии только одного телефонного номера СМО будет плохо справляться с потоком заявок.

Многоканальная система с отказами

Рассмотрим классическую задачу Эрланга. Имеется n каналов, на которые поступает поток заявок с интенсивностью λ. Поток обслуживаний имеет интенсивность μ. Найти предельные вероятности состояния системы и показатели ее эффективности.

Система S (СМО) имеет следующие состояния (нумеруем их по числу заявок, находящихся в системе): S_0, S_1, S_2, ..., S_k, ..., S_n, где S_k – состояние системы, когда в ней находится k заявок, т. е. занято k каналов.

Граф состояний СМО показан на рис. 5.4.

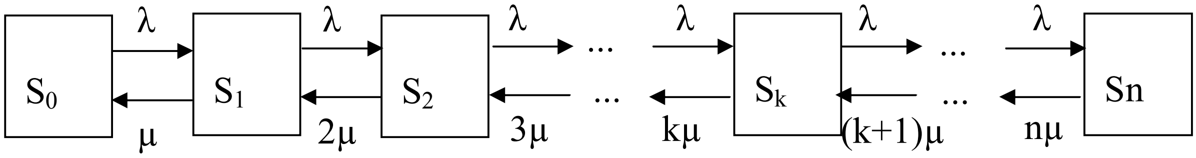


Рис. 5.4. Граф состояний многоканальной СМО

Поток заявок последовательно переводит систему из любого левого состояния в правое соседнее состояние с одной и той же интенсивностью λ. Интенсивность же потока обслуживаний, переводящих систему из любого правого состояния в левое соседнее состояние, постоянно меняется. Действительно, если СМО находится в состоянии S_2 (два канала заняты), то она может перейти в состояние S_1 (один канал занят), когда закончит обслуживать либо первый, либо второй канал, т. е. суммарная интенсивность их потоков обслуживания будет 2μ. Аналогично, суммарный поток обслуживаний, переводящих СМО из состояния S_3 (три канала заняты) в S_2, будет иметь интенсивность 3μ, т. е. может освободиться любой из трех каналов, и т. д.

Для предельной вероятности получим

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2!\,\mu^2} + \ldots \frac{\lambda^k}{k!\,\mu^k} + \ldots + \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n}\right)^{-1}. \qquad (5.13)$$

Величина

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \qquad (5.14)$$

называется приведенной интенсивностью потока заявок или интенсивностью нагрузки канала. Она выражает среднее число заявок, приходящееся на среднее время обслуживания одной заявки. Теперь можно записать:

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^k}{k!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1}, \qquad (5.15)$$

$$p_1 = \rho \cdot p_0,\ p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0,\ \ldots\ p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0,\ \ldots\ p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0. \qquad (5.16)$$

Эти формулы для предельных вероятностей получили название формул Эрланга – в честь основателя теории массового обслуживания.

Вероятность отказа СМО есть предельная вероятность того, что все каналы будут заняты, т. е.

$$P_{OTK} = \frac{\rho^n}{n!} p_0. \qquad (5.17)$$

Относительная пропускная способность – вероятность того, что заявка будет обслужена:

$$Q = 1 - P_{OTK} = 1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0. \qquad (5.18)$$

Абсолютная пропускная способность:

$$A = \lambda \cdot Q = \lambda \cdot \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0\right). \qquad (5.19)$$

Среднее число занятых каналов $\bar{k}$ есть математическое ожидание числа занятых каналов:

$$\bar{k} = \sum_{k=0}^{n} k \cdot p_k .$$

Однако среднее число занятых каналов можно найти проще, если учесть, что абсолютная пропускная способность системы A есть не что иное, как интенсивность потока обслуженных системой заявок (в единицу времени). Так как каждый занятый канал обслуживает в среднем μ заявок (в единицу времени), то среднее число занятых каналов

$$\bar{k} = \frac{A}{\mu}. \qquad (5.20)$$

Или, учитывая (5.19), (5.14):

$$\overline{k} = \rho \cdot \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0\right). \qquad (5.21)$$

Пример 5.2. По условию предыдущей задачи определить оптимальное число телефонных номеров, если условием оптимальности считать удовлетворение в среднем 90 заявок из 100.

Решение. Интенсивность нагрузки канала, согласно (5.14), $\rho = 90/30 = 3$, т. е. за время среднего (по продолжительности) телефонного разговора $\overline{t_{об}} = 2$ *мин* поступает в среднем 3 заявки на переговоры. Будем постепенно увеличивать число каналов и определять характеристики обслуживания. Так, при $n = 2$, согласно (5.15),

$$p_0 = \left(1 + 3 + 3^2 / 2!\right)^{-1} = 0{,}118 \approx 0{,}12.$$

Согласно (5.18), $Q = 1 - \left(3^2 / 2!\right) \cdot 0{,}118 = 0{,}471 \approx 0{,}47$; согласно (5.19), $A = 90 \cdot 0{,}471 = 42{,}4$ и т. д. Значение характеристик СМО сведем в таблицу:

Характеристика обслуживания	Число каналов (телефонных номеров)					
	1	2	3	4	5	6
Относительная пропускная способность Q	0,25	0,47	0,65	0,79	0,90	0,95
Абсолютная пропускная способность A	22,5	42,4	58,8	71,5	80,1	85,3

По условию оптимальности $Q \geq 0{,}9$, следовательно, необходимо установить пять телефонных номеров. При этом в час будет обслуживаться в среднем 80 заявок $(A = 80{,}1)$, а среднее число занятых телефонных номеров (каналов) будет равно $\overline{k} = A / \mu = 80{,}1/30 = 2{,}67$.

5.2. Системы массового обслуживания с неограниченной очередью

Рассмотрим вначале одноканальную систему с неограниченной очередью. Имеется одноканальная СМО с очередью, на которую не наложены никакие ограничения (ни по длине очереди, ни по времени ожидания). Поток заявок, поступающих в СМО, имеет интенсивность λ, а поток обслуживаний – интенсивность μ. Необходимо найти предельные вероятности состояний и показатели эффективности СМО.

Система может находиться в одном из состояний: S_0, S_1, S_2, ..., S_k, по числу заявок, находящихся в СМО: S_0 – канал свободен; S_1 – канал занят (обслуживает заявку), очереди нет; S_2 – канал занят, одна заявка стоит в очереди; ... S_k – канал занят, $(k-1)$ заявок в очереди и т. д.

Граф состояний СМО представлен на рис. 5.5.

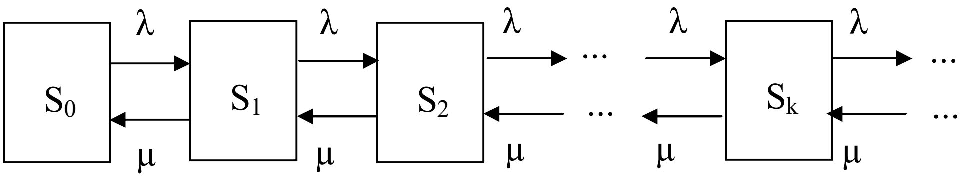


Рис. 5.5. Граф состояний одноканальной СМО
с неограниченной очередью

Доказано, что если $\rho < 1$, т. е. среднее число приходящих заявок меньше среднего числа обслуженных заявок (в единицу времени), то предельные вероятности существуют. Если $\rho \geq 1$, то очередь растет до бесконечности.

Для определения предельных вероятностей состояния системы будем иметь:

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \ldots \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \ldots\right)^{-1} = \left(1 + \rho + \rho^2 + \ldots + \rho^k + \ldots\right)^{-1}. \quad (5.22)$$

Поскольку предельные вероятности существуют лишь при $\rho < 1$, то геометрический ряд со знаменателем $\rho < 1$ сходится к сумме, равной $\frac{1}{1-\rho}$. Поэтому

$$p_0 = 1 - \rho \ . \quad (5.23)$$

Соответственно,

$$\begin{aligned} &p_1 = \rho p_0 = \rho(1-\rho); \qquad p_2 = \rho^2 p_0 = \rho^2(1-\rho); \\ &p_3 = \rho^3 p_0 = \rho^3(1-\rho); \quad \ldots\ldots \quad p_k = \rho^k p_0 = \rho^k(1-\rho) \ . \end{aligned} \quad (5.24)$$

Предельные вероятности p_0, p_1, p_2, ... p_k, ... образуют убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $\rho < 1$, следовательно, вероятность p_0 – наибольшая. Это означает, что если СМО справляется с потоком заявок (при $\rho < 1$), то наиболее вероятным будет отсутствие заявок в системе.

Среднее число заявок в системе $L_{сист.}$ определяется по формуле математического ожидания:

$$L_{сист.} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p_k = (1-\rho) \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \rho^k \tag{5.25}$$

(суммирование от 1, так как нулевой член $p_0 = 0$). Можно показать, что эта формула при $\rho < 1$ преобразуется к виду:

$$L_{сист.} = \frac{\rho}{1-\rho}. \tag{5.26}$$

Найдем среднее число заявок в очереди $L_{оч}$. Очевидно, что

$$L_{оч} = L_{сист.} - L_{об}, \tag{5.27}$$

где $L_{об}$ – среднее число заявок, находящихся под обслуживанием.

Среднее число заявок под обслуживанием определим как вероятность того, что канал занят:

$$L_{об} = P_{зан} = 1 - p_0 = \rho, \tag{5.28}$$

где использована формула (5.23). Отсюда получим:

$$L_{оч} = L_{сист.} - L_{об} = \frac{\rho}{1-\rho} - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho}. \tag{5.29}$$

Доказано, что при любом характере потока заявок, при любом распределении времени обслуживания, при любой дисциплине обслуживания среднее время пребывания заявки в системе (очереди) равно среднему числу заявок в системе (в очереди), деленному на интенсивность потока заявок.

$$T_{сист} = \frac{1}{\lambda} L_{сист}, \tag{5.30}$$

$$T_{оч} = \frac{1}{\lambda} L_{оч}. \tag{5.31}$$

Формулы (5.30), (5.31) называются формулами Литтла. Они вытекают из того, что в предельном стационарном режиме среднее число прибывающих в систему заявок, равно среднему числу заявок, покидающих ее: оба потока заявок имеют одну и ту же интенсивность λ.

На основании формул (5.30) и (5.31), с учетом (5.26) и (5.29) среднее время пребывания заявки в системе определится как

$$T_{сист} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}, \tag{5.32}$$

а среднее время пребывания заявки в очереди –

$$T_{оч} = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)}. \tag{5.33}$$

Пример 5.3. В порту имеется один причал для разгрузки судов. Интенсивность потока судов равна 0,4 судна в сутки. Среднее время разгрузки одного судна составляет 2 суток. Предполагается, что очередь может быть неограниченной длины. Найти показатели работы эффективности причала, а также вероятность того, что ожидают разгрузку не более чем 2 судна.

Решение. Имеем $\rho = \lambda / \mu = \lambda \bar{t}_{об} = 0{,}4 \cdot 2 = 0{,}8$. Так как $\rho = 0{,}8 < 1$, то очередь на разгрузку не может бесконечно возрастать и предельные вероятности существуют. Найдем их.

Вероятность того, что причал свободен, согласно (5.2), равна – $p_0 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$, а вероятность того, что занят – $P_{зан} = 1 - p_0 = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$. Согласно (5.24), вероятности того, что у причала находится 1, 2, 3 судна (т. е. ожидают разгрузки 0, 1, 2 судна), равны: $p_1 = 0{,}8(1-0{,}8) = 0{,}16$; $p_2 = 0{,}8^2(1-0{,}8) = 0{,}128$; $p_3 = 0{,}8^3(1-0{,}8) = 0{,}1024$.

Вероятность того, что ожидают разгрузку не более чем 2 судна, составляет:

$$P = p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}16 + 0{,}128 + 0{,}1024 = 0{,}3904.$$

Среднее число судов, ожидающих разгрузку, согласно (5.27), равно:

$$L_{оч} = 0{,}8^2 / (1-0{,}8) = 3{,}2,$$

а среднее время ожидания разгрузки

$$T_{оч} = 3{,}2 / 0{,}8 = 4\ \textit{суток}.$$

Среднее число судов, находящихся у причала $L_{сист} = 0{,}8/(1-0{,}8) = 4$, а среднее время пребывания судна у причала $T_{сист} = 4 / 0{,}8 = 5$.

Очевидно, что эффективность разгрузки судов невысокая. Для ее повышения необходимо уменьшить среднее время разгрузки судна $\bar{t}_{об}$ либо увеличить число причалов.

Рассмотрим теперь многоканальную СМО с неограниченной очередью.

Имеется n каналов с неограниченной очередью. Поток заявок, поступающих в СМО, имеет интенсивность λ, а поток обслуживаний – μ. Необходимо найти предельные вероятности состояния СМО и показатели ее эффективности.

Система может находиться в одном из состояний S_0, S_1, S_2, ..., S_k, ..., S_n, нумеруемых по числу заявок, находящихся в СМО: S_0 – в системе нет заявок (все каналы свободны); S_1 – занят один канал, остальные свободны; S_2 – заняты два канала, остальные свободны; ... , S_k – занято k каналов, остальные свободны; .., S_n – заняты все n каналов (очереди нет); S_{n+1} – заняты все n каналов, в очереди одна заявка; ..., S_{n+r} – заняты все n каналов, r заявок стоят в очереди.

Граф состояний системы показан на рис. 5.6. В отличие от предыдущей СМО, интенсивность потока обслуживаний (переводящих систему из одного состояния в другое справа налево) не остается постоянной. По мере увеличения числа заявок в СМО от 0 до n она увеличивается от величины μ до величины $n\mu$, так как соответственно увеличивается число каналов обслуживания. При числе заявок в СМО большем, чем n, интенсивность потока обслуживаний сохраняется равной $n\mu$.

Можно показать, аналогично предыдущему, что при $\rho / n < 1$ предельные вероятности существуют.

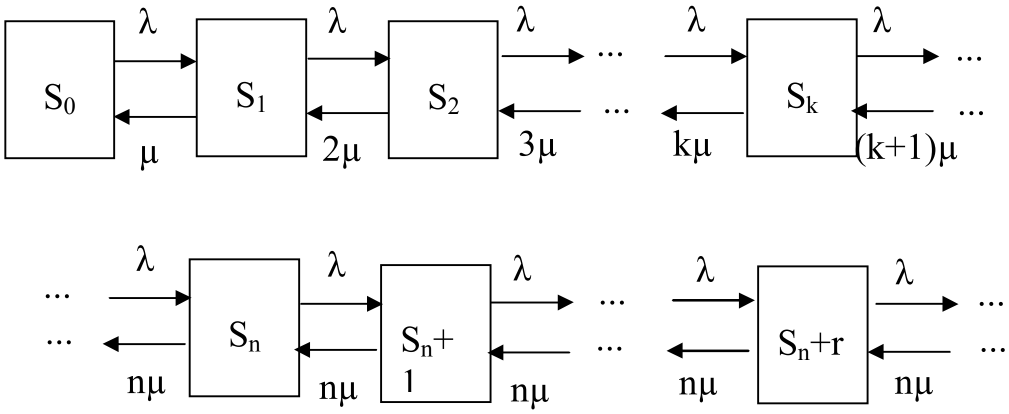


Рис. 5.6. Граф состояний многоканальной СМО
с неограниченной очередью

Если $\rho / n \geq 1$, то очередь растет до бесконечности. Можно получить следующие формулы для предельных вероятностей состояний n – канальной СМО с неограниченной очередью:

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\right)^{-1}. \quad (5.34)$$

$$p_1 = \frac{\rho}{1!} p_0, \ldots, p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0, \ldots, p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0. \quad (5.35)$$

$$p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} p_0, \ldots, p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} p_0, \ldots. \quad (5.36)$$

Вероятность того, что заявка окажется в очереди:

$$P_{оч} = \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} p_0. \quad (5.37)$$

Для n -канальной СМО с неограниченной очередью, используя прежние приемы, можно найти:

среднее число занятых каналов

$$\bar{k} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho, \quad (5.38)$$

среднее число заявок в очереди

$$L_{оч} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n! \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2}, \quad (5.39)$$

среднее число заявок в системе

$$L_{сист} = L_{оч} + \rho. \quad (5.40)$$

Среднее время пребывания заявки в очереди и среднее время пребывания заявки в системе, как и ранее, находятся по формулам Литтла (5.30) и (5.31).

Для СМО с неограниченной очередью при $\rho < 1$ любая заявка, пришедшая в систему, будет обслужена, т. е. вероятность отказа $P_{ОТК} = 0$, относительная пропускная способность $Q = 1$, а абсолютная пропускная способность равна интенсивности входящего потока заявок, т. е. $A = \lambda$.

Пример 5.4. В универсаме к кассе поступает поток покупателей с интенсивностью $\lambda = 81\, чел / час$. Средняя продолжительность обслуживания контролером-кассиром одного покупателя $\bar{t}_{об} = 2\, мин$. Определить:

1) минимальное количество контролеров-кассиров $n_{\min}$, при котором очередь не будет расти до бесконечности, и соответствующие характеристики обслуживания при $n = n_{\min}$;

2) оптимальное количество $n_{опт}$, при котором относительная величина затрат $C_{ОТН}$, связанная с издержками на содержание каналов обслуживания и с пребыванием в очереди покупателей, задаваемая, например, как $C_{ОТН} = \frac{1}{\lambda} n + 3T_{ОЧ}$, будет минимальна, и сравнить характеристики обслуживания при $n = n_{\min}$ и $n = n_{ОПТ}$.

Решение. 1) По условию задачи $\lambda = 81\left(ч^{-1}\right) = 81/60 = 1{,}35\, мин^{-1}$. Отсюда, согласно (5.38), $\rho = \lambda / \mu = \lambda \cdot \bar{t}_{об} = 1{,}35 \cdot 2 = 2{,}7$. Очередь не будет возрастать до бесконечности при условии $\rho / n < 1$, т. е. при $n > \rho = 2{,}7$. Таким образом, минимальное количество контролеров-кассиров $n_{\min} = 3$.

Найдем характеристики обслуживания СМО при $n = 3$.

Вероятность того, что в узле расчета отсутствуют покупатели, равна (см. формулу (5.34)):

$$p_0 = \left(1 + 2{,}7 + \frac{2{,}7^2}{2!} + \frac{2{,}7^3}{3!} + \frac{2{,}7^4}{3! \cdot (3 - 2{,}7)}\right)^{-1} = 0{,}025,$$

т. е. в среднем 2,5% времени контролеры-кассиры будут простаивать.

Вероятность того, что в узле расчета будет очередь (см. формулу (5.37)), равна:

$$P_{оч} = \left(\frac{2{,}7^4}{3!\left(3 - 2{,}7\right)} \right) \cdot 0{,}025 = 0{,}735 .$$

Среднее число покупателей, находящихся в очереди (см. формулу (5.39)):

$$L_{оч} = \left(\frac{2{,}7^4}{3 \cdot 3!\left(1 - \frac{2{,}7}{3}\right)^2} \right) \cdot 0{,}025 = 7{,}35 .$$

Среднее время ожидания в очереди (см. формулу (5.31)):

$$T_{оч} = 7{,}35 / 1{,}35 = 5{,}44 \text{ мин} .$$

Среднее число покупателей на узле расчета (см. формулу (5.40)):

$$L_{сист} = 7{,}35 + 2{,}7 = 10{,}05 .$$

Среднее время нахождения покупателей в узле расчета (см. формулу 5.30):

$$T_{сист} = 10{,}05 / 1{,}35 = 7{,}44 \text{ мин} .$$

Среднее число контролеров-кассиров, занятых обслуживанием покупателей $\overline{k} = 2{,}7$ (см. формулу (5.38)). Коэффициент (доля) занятых обслуживанием контролеров-кассиров $\rho / n = 0{,}9$. Абсолютная пропускная способность узла расчета 81 покупатель в час.

Анализ характеристик обслуживания свидетельствует о значительной перегрузке узла расчета при наличии трех контролеров-кассиров.

2) Относительная величина затрат при $n = 3$.

$$C_{отн} = \frac{1}{\lambda} n + 3T_{оч} = 3 / 1{,}35 + 3 \cdot 5{,}44 = 18{,}54 .$$

Рассчитаем относительную величину затрат при других значениях n.

Характеристика обслуживания	Число контролеров-кассиров				
	3	4	5	6	7
Вероятность простоя контролеров-кассиров p_0	0,025	0,057	0,065	0,067	0,067
Среднее число покупателей в очереди $T_{оч}$	5,44	0,60	0,15	0,03	0,01
Относительная величина затрат $C_{отн}$	18,54	4,77	4,14	4,53	5,22

Как видно из таблицы, минимальные затраты получены при $n = n_{ОПТ} = 5$ контролерах-кассирах.

Определим характеристики обслуживания узла расчета при $n = n_{ОПТ} = 5$. Получим $P_{ОЧ} = 0{,}091$; $L_{ОЧ} = 0{,}198$; $T_{ОЧ} = о{,}146\ мин$; $L_{СИСТ} = 2{,}90$; $T_{СИСТ} = 2{,}15\ мин$; $\bar{k} = 2{,}7$; $k_з = 0{,}54$.

Как видно, при $n = n_{ОПТ} = 5$, по сравнению с $n = 3$, существенно уменьшились вероятность возникновения очереди $n = 3$, длина очереди $L_{ОЧ}$ и среднее время пребывания в очереди $T_{ОЧ}$. Соответственно, среднее число покупателей $L_{СИСТ}$ и среднее время нахождения в узле расчета $T_{СИСТ}$, а также доля занятых обслуживанием контролеров-кассиров $k_з$. Но среднее число занятых обслуживанием контролеров-кассиров $\bar{k}$ и абсолютная пропускная способность узла расчета A, естественно, не изменились.

5.3. Системы массового обслуживания с ограниченной очередью

СМО с ограниченной очередью отличаются от рассмотренных выше задач лишь тем, что число заявок в очереди ограничено (не может превосходить некоторого заданного m). Если новая заявка приходит в момент, когда все места в очереди заняты, она покидает СМО необслуженной, т. е. получает отказ.

Очевидно, что для вычисления предельных вероятностей состояний и показателей эффективности таких СМО может быть использован тот же подход, что и выше. При этом суммировать надо не бесконечную прогрессию, а конечную. Соответствующие формулы сведены в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Формулы для решения задач по СМО

Показатель	СМО с ограниченной очередью	
	одноканальная	многоканальная
1	2	3
Предельная вероятность	$p_0 = \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}$ $p_1 = \rho p_0$, $p_2 = \rho^2 p_0, \ldots,$ $p_к = \rho^к p_0$	$p_0 = \left(1 + \dfrac{\rho}{1!} + \ldots + \dfrac{\rho^n}{n!} + \ldots + \dfrac{\rho^{n+1}\left(1-(\rho/n)^m\right)}{n \cdot n!\cdot(1-\rho/n)}\right)^{-1}$, $p_1 = \dfrac{\rho}{1!}p_0, \ldots, p_к = \dfrac{\rho^к}{к!}p_0, \ldots, p_n = \dfrac{\rho^n}{n!}p_0$, $p_{n+1} = \dfrac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!}p_0, \ldots, p_{n+r} = \dfrac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!}p_0 \quad (r = 1, \ldots, m)$

Окончание табл. 5.1

1	2	3
Вероятность отказа	$P_{ОТК} = P_{m+1} = \rho^{m+1} p_0$	$P_{ОТК} = P_{n+m} = \dfrac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0$
Абсолютная пропускная способность	$A = \lambda Q = \lambda\left(1 - \rho^{m+1} p_0\right)$	$A = \lambda Q = \lambda\left(1 - \dfrac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0\right)$
Относительная пропускная способность	$Q = 1 - P_{ОТК} = 1 - \rho^{m+1} p_0$	$Q = 1 - P_{ОТК} = 1 - \dfrac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0$
Среднее число заявок в очереди	$L_{ОЧ} = \rho^2 \dfrac{\left(1 - \rho^m (m + 1 - m\rho)\right)}{\left(1 - \rho^{m+2}\right)(1 - \rho)}$	$L_{ОЧ} = \dfrac{\rho^{n+1} p_0 \left(1 - \left(m + 1 - m\dfrac{\rho}{n}\right)\left(\dfrac{\rho}{n}\right)^m\right)}{n \cdot n! \left(1 - \dfrac{\rho}{n}\right)^2}$
Среднее число заявок под обслуживанием	$L_{ОБ} = 1 - p_0$	$\overline{k} = \rho\left(1 - \dfrac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0\right)$
Среднее число заявок в системе	$L_{СИСТ} = L_{ОЧ} + L_{ОБ}$	$L_{СИСТ} = L_{ОЧ} + \overline{k}$

Среднее время пребывания заявки в очереди и в системе определяется по формулам Литтла (5.30) и (5.31).

На практике часто встречаются СМО с так называемыми нетерпеливыми заявками. Такие заявки могут уйти из очереди, если время ожидания превышает некоторую величину. В частности, такого рода заявки возникают в различных технологических системах, в которых задержка с началом обслуживания может привести к потере качества продукции, в системах оперативного управления, когда срочные сообщения теряют ценность (или даже смысл), если они не поступают на обслуживание в течение определенного времени.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

Задание 5.1. На вход двухканальной СМО с отказами поступает поток заявок с интенсивностью $\lambda = 12$ заявок в час. Время обслуживания заявки одним каналом $t_{обсл} = 15$ мин.

Найти абсолютную пропускную способность СМО с отказами.

Задание 5.2. На вход пятиканальной СМО с отказами поступает поток заявок с интенсивностью $\lambda = 60$ заявок в час. Время обслуживания заявки одним каналом $t_{обсл} = 1$ мин.

Найти среднее число занятых каналов системы.

Задание 5.3. Станция «железная дорога» в мегаполисе принимает составы для разгрузки угля на $n = 5$ платформах. В среднем за сутки на станцию прибывают 16 составов с углем. Поступление носит случайный характер. Плотность прихода составов показала, что поступление на разгрузку удовлетворяет пуассоновскому потоку с параметром $\alpha = 2/3$ состава в час. Время разгрузки состава является случайной величиной, удовлетворяющей экспоненциальному закону со средним временем разгрузки $t_{ср} = 6$ ч. Простой состава в сутки составляет $q_{ож} = 100$ у. е; простой платформы в сутки за опоздание прихода состава – $q_{пр} = 1000$ у. е; стоимость эксплуатации платформы в сутки – $q_з = 1000$ у. е. Рассчитать издержки за сутки. Требуется провести анализ эффективности функционирования станции исходя из того, что работа станции представляет собой СМО с неограниченной очередью.

Задание 5.4. Интернет-провайдер в небольшом городе имеет 5 выделенных каналов обслуживания. В среднем на обслуживание одного клиента уходит 25 мин. В систему в среднем поступает 6 заказов в час. Если свободных каналов нет, следует отказ. Определить характеристики обслуживания: вероятность отказа, среднее число занятых обслуживанием линий связи, абсолютную и относительную пропускные способности, вероятность обслуживания. Найти число выделенных каналов, при котором относительная пропускная способность системы будет не менее 0,95. Считать, что потоки заявок и обслуживаний простейшие.

Задание 5.5. Порт имеет один причал для разгрузки судов. Интенсивность потока 0,4 в сутки, среднее время разгрузки одного судна 2 суток. В предположении неограниченности очереди определить показатели эффективности работы причала и вероятность ожидания разгрузки не более 2 судов.

Задание 5.6. На вход двухканальной СМО с неограниченной очередью поступает поток заявок с интенсивностью $\lambda = 12$ заявок в час. Время обслуживания заявки одним каналом $t_{обсл} = 15$ мин. Рассчитать параметры эффективности работы системы.

Задание 5.7. Порт имеет один причал для разгрузки судов. Интенсивность потока 0,4 в сутки, среднее время разгрузки одного судна 2 суток. Определить показатели работы порта при условии, что судно покидает порт при наличии в очереди более 3 судов.

Задание 5.8. В мини-маркет поступает поток покупателей с интенсивностью 6 покупателей в 1 мин, которых обслуживают три контролера-кассира с интенсивностью 2 покупателя в 1 мин. Длина очереди ограничена 5 покупателями. Оценить эффективность обслуживания.

Задание 5.9. На автомойку в среднем за час приезжают 9 автомобилей, но если в очереди уже находятся 4 автомобиля, вновь подъезжающие клиенты, как правило, не встают в очередь, а проезжают мимо. Среднее время мойки автомобиля составляет 20 мин, а мест для мойки всего два. Средняя стоимость мойки автомобиля составляет 70 руб. Определите среднюю величину потери выручки автомойки в течение дня.

Задание 5.10. Имеется автозаправочная станция с двумя колонками. В очереди не может быть больше трех машин. Интенсивность и среднее время заправки равны 2,1 и 0,55. Найти вероятность простоя системы.

Задание 5.11. На плодоовощную базу в среднем через 30 мин прибывают автомашины с плодоовощной продукцией. Среднее время разгрузки одной машины составляет 1,5 ч. Разгрузку производят две бригады. На территории базы у дебаркадера могут находиться в очереди в ожидании разгрузки не более 4 автомашин. Оценить среднее время ожидания.

Задание 5.12. В расчетном узле магазина самообслуживания работают 3 кассы. Интенсивность входного потока составляет 5 покупателей в минуту. Интенсивность обслуживания каждого контролера-кассира составляет 2 покупателя минуту. Рассчитайте параметры эффективности системы с неограниченной очередью.

Задание 5.13. В аудиторскую фирму поступает простейший поток заявок на обслуживание с интенсивностью $\lambda = 1,5$ заявки в день. Время обслуживания распределено по показательному закону и равно в среднем трем дням. Аудиторская фирма располагает пятью независимыми бухгалтерами, выполняющими аудиторские проверки (обслуживание заявок). Очередь заявок не ограничена. Дисциплина очереди не регламентирована. Определите вероятностные характеристики аудиторской фирмы как системы массового обслуживания, работающей в стационарном режиме с неограниченной очередью.

Задание 5.14. В мастерской по ремонту холодильников работает n мастеров. В среднем в течение дня поступает в ремонт λ холодильников. Поток заявок пуассоновский. Система массового обслуживания с неограниченной очередью. Время ремонта подчиняется экспоненциальному закону распределения вероятностей, в среднем в течение дня при семичасовом рабочем дне каждый из мастеров ремонтирует μ холодильников.

Требуется определить:

1) вероятность того, что все мастера свободны от ремонта холодильников;

2) вероятность того, что все мастера заняты ремонтом;

3) среднее время ремонта одного холодильника;

4) в среднем время ожидания начала ремонта для каждого холодильника;

5) среднюю длину очереди, которая определяет необходимое место для хранения холодильника, требующего ремонта;

6) среднее число мастеров, свободных от работы.

Глава 6. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИГР

Теория игр была основана Джоном фон Нейманом и Оскаром Моргенштерном в их первой работе «The Theory of Games and Economic Behavior», изданной в 1944 году. В 1928 году в математических анналах фон Нейманом была опубликована статья «О теории общественных игр», в которой впервые было применено понятие «теория игр». Использование этого понятия объясняется схожестью логики принятия решений в таких играх, как шахматы и покер. Характерным для таких ситуаций является то, что результат для принимающего решение зависит не только от его решения, но и от того, какое решение примут другие. Поэтому оптимальный исход не может быть получен в результате принятия решения одним лицом.

Другим предшественником теории игр по праву считается французский математик Э. Борель (1871–1956). Некоторые фундаментальные идеи были независимо предложены А. Вальдом (1902–1950), заложившим основы нового подхода к статистической теории принятия решений.

Первые приложения теория игр нашла в математической статистике. Во время Второй мировой войны и сразу после нее теорией игр серьезно заинтересовались военные, которые увидели в ней аппарат для исследования стратегических решений. Ее использовали как плодотворный источник теоретических моделей в экономике и социологии. Методы теории игр используются также в теории операций и в линейном программировании.

6.1. Предмет и задачи теории игр

В процессе целенаправленной человеческой деятельности возникают ситуации, в которых интересы отдельных лиц (участников, групп, сторон) либо прямо противоположны (антагонистичны), либо, не будучи непримиримыми, все же не совпадают. Простейшими и наиболее наглядными примерами таких ситуаций являются спортивные игры, арбитражные споры, военные учения (маневры), борьба между блоками избирателей за своих кандидатов, в международных отношениях – отстаивание интересов своего государства и т.п. Здесь каждый из участников сознательно стремится добиться наилучшего результата за счет другого участника. Подобного рода ситуации встречаются и в различных сферах производственной деятельности.

Все ситуации, когда эффективность действия одного из участников зависит от действий других, можно разбить на два типа: интересы участников совпадают, и они могут договориться о совместных действиях; интересы участников не совпадают. В этих случаях может оказаться невыгодным сообщать другим участникам свои решения, так как кто-нибудь из них сможет воспользоваться знанием чужих решений и получит больший выигрыш за счет других участников. Ситуации такого типа называются ***конфликтными.***

Для указанных ситуаций характерно, что эффективность решений, принимаемых в ходе конфликта каждой из сторон, существенно зависит от действий другой стороны. При этом ни одна из сторон не может полностью контролировать положение, так как и той и другой стороне решения приходится принимать в условиях неопределенности. Так, при определении объема выпуска продукции на одном предприятии нельзя не учитывать размеры выпуска аналогичной продукции на других предприятиях.

В реальных условиях нередко возникают ситуации, в которых антагонизм отсутствует, но существуют противоположные тенденции. Например, для нормального функционирования производства, с одной стороны, необходимо наличие запасов разнообразных ресурсов, но с другой – стремление к чрезвычайному увеличению этих запасов вызывает дополнительные затраты по их содержанию и хранению. В приведенных примерах конфликтные ситуации возникают в результате сознательной деятельности людей. Однако на практике встречаются неопределенности, которые порождаются не сознательным противодействием другой стороны, а недостаточной информированностью об условиях проведения планируемой операции.

Раздел математики, изучающий конфликтные ситуации на основе их математических моделей, называется ***теорией игр.*** Таким образом, теория игр – это математическая теория конфликтных ситуаций, разрабатывающая рекомендации по наиболее рациональному образу действий каждого из участников в ходе конфликтной ситуации, т.е. таких действий, которые обеспечивали бы ему наилучший результат. Игровую схему можно придать многим ситуациям в экономике. Здесь выигрышем могут быть эффективность использования дефицитных ресурсов, производственных фондов, величина прибыли, себестоимость и т.д.

Необходимо подчеркнуть, что методы и рекомендации теории игр разрабатываются применительно к таким специфическим конфликтным ситуациям, которые обладают свойством ***многократной повторяемости***. Если конфликтная ситуация реализуется однократно или ограниченное число раз, то рекомендации теории игр теряют смысл.

Чтобы проанализировать конфликтную ситуацию по ее математической модели, ситуацию необходимо упростить, учтя лишь важнейшие факторы, существенно влияющие на ход конфликта.

Определение 1. ***Игрой*** называется упрощенная математическая модель конфликтной ситуации, отличающаяся от реального конфликта тем, что ведется ***по*** определенным ***правилам***.

Игра – это совокупность правил, определяющих возможные действия (чистые стратегии) участников игры. Суть игры в том, что каждый из участников принимает такие решения в развивающейся конфликтной ситуации, которые, как он полагает, могут обеспечить ему наилучший исход. Исход игры – это значение некоторой функции, называемой ***функцией выигрыша*** (платежной функцией), которая может задаваться либо аналитически выражением, либо таблично (матрицей). Величина выигрыша зависит от стратегии, применяемой игроком.

Человечество издавна пользуется такими формализованными моделями конфликтных ситуаций, которые являются ***играми*** в буквальном смысле слова. Примерами могут служить шашки, шахматы, карточные игры и т.д. Все эти игры носят характер соревнования, протекающего по известным правилам и заканчивающегося «победой» (выигрышем) того или иного игрока.

Такие формально регламентированные, искусственно организованные игры представляют собой наиболее подходящий материал для иллюстрации и усвоения основных понятий теории игр. Терминология, заимствованная из практики таких игр, применяется и при анализе других конфликтных ситуаций: стороны, участвующие в них, условно именуются ***игроками***, а результат столкновения – ***выигрышем*** одной из сторон.

Определение 2. Под ***правилами игры*** подразумевается система условий, регламентирующая возможные варианты действий обеих сторон.

Определение 3. ***Стратегией*** игрока называется совокупность правил, однозначно определяющих последовательность действий игрока в каждой конкретной ситуации, складывающейся в процессе игры.

Определение 4. ***Оптимальной*** называется стратегия, которая при многократном повторении игры обеспечивает данному игроку максимально возможный средний выигрыш.

Основное предположение, исходя из которого находят оптимальные стратегии, состоит в том, что противник по меньшей мере так же разумен, как и сам игрок, и делает все для того, чтобы добиться своей цели.

Количество стратегий у каждого игрока может быть конечным или бесконечным, в зависимости от этого игры подразделяются на конечные и бесконечные.

Всякая игра состоит из отдельных партий.

Определение 5. ***Партией*** называется каждый вариант реализации игры определенным образом.

В свою очередь, в партии игроки совершают конкретные ходы.

Определение 6. ***Ходом*** называется выбор и реализация игроком одного из допустимых вариантов поведения.

Ходы бывают ***личные*** и ***случайные***. При личном ходе игрок самостоятельно и осознанно выбирает и реализует ту или иную чистую стратегию. Набор возможных вариантов при каждом личном ходе регламентирован правилами игры и зависит от всей совокупности предшествующих ходов обеих сторон. Например, в шахматах каждый ход является личным. При случайном ходе выбор чистой стратегии производится с использованием какого-либо механизма случайного выбора, например с применением таблицы случайных чисел. Примером может служить бросание монеты или игральной кости.

Конфликтные ситуации, встречающиеся в практике, порождают различные виды игр. Классифицировать игры можно по разным признакам. Различают, например, игры по количеству игроков. В игре может участвовать любое конечное число игроков.

Определение 7. Если в игре игроки объединяются в две группы, преследующие противоположные цели, то такая игра называется ***игрой двух лиц (парная игра).***

В зависимости от количества стратегий в игре они делятся на конечные или бесконечные. В зависимости от взаимоотношений участников различают игры бескоалиционные (участники не имеют права заключать соглашения), или некооперативные, и коалиционные, или кооперативные. По характеру выигрышей игры делятся на игры с нулевой суммой и ненулевой суммой.

Определение 8. ***Игрой с нулевой суммой*** называется игра, в которой общий капитал игроков не меняется, а лишь перераспределяется в ходе игры, в связи с чем сумма выигрышей равна нулю (проигрыш принимается как отрицательный выигрыш).

В играх с ненулевой суммой сумма выигрышей отлична от нуля. Например, при проведении лотереи часть взноса участников идет организатору лотереи.

По виду функции выигрыша игры делятся на ***матричные, биматричные, непрерывные, выпуклые, сепарабельные и др.***

Определение 9. ***Матричной*** игрой (при двух участниках) называется игра, в которой выигрыши первого игрока (проигрыши второго игрока) задаются матрицей.

В биматричных играх выигрыши каждого игрока задаются своей матрицей. Другие типы таких игр различаются видом аналитического выражения платежной функции. По количеству ходов игры делятся на одноходовые (выигрыш распределяется после одного хода каждого игрока) и многоходовые (выигрыш распределяется после нескольких ходов). Многоходовые игры в свою очередь делятся на позиционные, стохастические, дифференциальные и др. В зависимости от объема имеющейся информации различают игры с полной и неполной информацией.

В реальных конфликтных ситуациях каждый из игроков сознательно стремится найти наилучшее для себя поведение, имея общее представление о множестве допустимых для партнера ответных действий, но не ведая о том, какое же конкретное решение будет выбрано им в данный момент. В этом проявляется в равной мере неопределенность ситуации для каждого из партнеров.

Определение 10. Игры, в которых участники стремятся добиться для себя наилучшего результата, сознательно выбирая допустимые правилами игры способы действий, называются ***стратегическими***.

Однако в экономической практике нередко приходится формализовать (моделировать) ситуации, придавая им игровую схему, в которых один из участников безразличен к результату игры. Такие игры называют ***играми с природой,*** понимая под термином "***природа***" всю совокупность внешних обстоятельств, в которых сознательному игроку (его называют иногда статистиком, а соответствующую игру – статистической) приходится принимать решение. Например, выбор агрономической службой сельскохозяйственного предприятия участков для посева той или иной культуры в надежде получить в предстоящем году наилучший урожай; определение объема выпуска сезонной продукции в ожидании наиболее выгодного для ее реализации уровня спроса; формирование пакета ценных бумаг в расчете на высокие дивиденды и т.п. Здесь в качестве второго игрока выступает: в первом примере – в буквальном смысле природа; во втором – уровень спроса; в третьем – размеры ожидаемой прибыли.

В играх с природой степень неопределенности для сознательного игрока (статистика) возрастает: если в стратегических играх каждый из участников постоянно ожидает наихудшего для себя ответного действия партнера, то в статистических играх «природа», будучи индифферентной в отношении выигрыша инстанцией, может предпринимать и такие ответные действия (будем говорить: реализовывать такие состояния), которые ей совершенно невыгодны, а выгодны сознательному игроку (статистику).

В дальнейшем мы будем рассматривать только парные матричные игры с нулевой суммой. В случае конечной игры двух лиц функции выигрыша каждого из игроков удобно представлять в виде матрицы выигрышей, где строки представляют стратегии одного игрока, столбцы – стратегии другого игрока, а в клетках матрицы указываются выигрыши каждого из игроков в каждой из образующихся ситуаций.

6.2. Решение матричной игры в чистых стратегиях

Рассмотрим простейшую математическую модель конечной конфликтной ситуации, в которой имеется два участника и выигрыш одного равен проигрышу другого. Такая модель называется ***антагонистической игрой*** двух лиц с нулевой суммой.

Игра состоит из двух ходов: игрок ***A*** выбирает одну из возможных стратегий $A_i,\ i = \overline{1,m}$ (либо A_1, либо A_2 и т.д., вплоть до A_m), а игрок ***B*** выбирает одну из возможных стратегий $B_j,\ j = \overline{1,n}$ (либо B_1, либо B_2 и т.д., вплоть до B_n). Каждый выбор производится при полном незнании выбора соперника. В результате выигрыш игроков составит соответственно матрицу: a_{ij} и $-a_{ij}$. Цель игрока ***A*** – максимизировать величину a_{ij} , а игрока ***B*** – минимизировать эту величину.

Определение 1. *Матрица, составленная из величин* a_{ij} $i = \overline{1,m}$ $j = \overline{1,n}$*, называется платежной матрицей, или матрицей игры.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Каждый элемент платежной матрицы a_{ij} $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ равен выигрышу ***А*** (проигрышу ***В***), если он выбрал какую-то конкретную стратегию A_i, $i = \overline{1,m}$, а игрок ***В*** выбирал какую-то конкретную стратегию B_j, $j = \overline{1,n}$.

Пример. В игре участвуют первый и второй игроки, каждый из них может записать независимо от другого цифры *1*, *2* и *3*. Если разность между цифрами, записанная игроками, положительна, то первый игрок выигрывает количество очков, равное разности между цифрами, и, наоборот, если разность отрицательна, то выигрывает второй игрок. Если разность равна нулю, то игра заканчивается вничью.

У первого игрока три стратегии (варианта действия): A_1 (записать *1*), A_2 (записать *2*), A_3 (записать *3*); у второго игрока также три стратегии: B_1 , B_2 , B_3 (табл.6.1).

Таблица 6.1

Задача по теории игр

	B_1 = ***1***	B_2 = ***2***	B_3 = ***3***
A_1 = ***1***	0	-1	-2
A_2 = ***2***	1	0	-1
A_3 = ***3***	2	1	0

Задача первого игрока – максимизировать свой выигрыш. Задача второго игрока – минимизировать свой проигрыш или минимизировать выигрыш первого игрока. Платежная матрица имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь матрица *А*, а её элементы – a_{ij} ($a_{11} = 0$, $a_{12} = -1$, $a_{13} = -2$, $a_{21} = 1$, $a_{22} = 0$, $a_{23} = -1$, $a_{31} = 2$, $a_{32} = 1$, $a_{33} = 0$).

Задача каждого из игроков – найти наилучшую стратегию игры, при этом предполагается, что противники одинаково разумны и каждый из них делает все, чтобы получить наибольший доход.

Найдем наилучшую стратегию первого игрока. Если игрок ***A*** выбрал какую-то стратегию A_i, $i = \overline{1,m}$ (либо A_1, либо A_2 либо A_3), то в худшем случае (например, если его ход известен ***B***) он получит выигрыш $\alpha_i = \min_j a_{ij}$ (т.е. минимальное значение a_{ij} при каком-то конкретном значении i, когда j пробегает все свои значения, а именно: $\alpha_1 = min_j\, a_{1j} = min(0,-1,-2) = -2$,
$\alpha_2 = min_j\, a_{2j} = min(1,0,-1) = -1$, $\alpha_3 = min_j\, a_{3j} = min(2,1,0) = 0$).

Предвидя такую возможность, игрок ***A*** должен выбрать такую стратегию, чтобы максимизировать свой минимальный выигрыш, т.е. из возможных вариантов 0, -1, -2 получить 0.

$$a = max_i\, \alpha_i = max_i\big(min_j\, a_{ij}\big) = max_i\, min_j\, a_{ij}\ . \qquad (6.1)$$

Определение 2. *Величина a – гарантированный выигрыш игрока* ***A*** *– называется нижней ценой игры. Стратегия* $A_{i\ опт}$, *обеспечивающая получение выигрыша a, называется максиминной.*

Если первый игрок будет придерживаться своей максиминной стратегии, то у него есть гарантия, что он в любом случае выиграет не меньше a.

Аналогично определяется наилучшая стратегия второго игрока. Игрок ***B*** при выборе стратегии B_j, $j = \overline{1,n}$, в худшем случае получит проигрыш $b_j = \max_i a_{ij}$. Он выбирает стратегию $B_{j\ опт}$, при которой его проигрыш будет минимальным и составит

$$b = min_j\, b_j = min_j\, max_i\, a_{ij}\ . \qquad (6.2)$$

Определение 3. *Величина b – гарантированный проигрыш ирока* ***B*** *– называется верхней ценой игры. Стратегия* $B_{j\ опт}$, *обеспечивающая получение проигрыша b, называется минимаксной.*

Если второй игрок будет придерживаться своей минимаксной стратегии, то у него есть гарантия, что он в любом случае проиграет не больше b.

Фактический выигрыш игрока ***A*** (проигрыш игрока ***B***) при разумных действиях партнеров ограничен верхней и нижней ценой игры. Для матричной игры справедливо неравенство ($a \leq b$).

Определение 4. *Если a = b = v, т.е.*

$$max_i\, a_i = max_i\, min_j\, a_{ij} = min_j\, b_j = min_j\, max_i\, a_{ij}\ ,$$

то выигрыш игрока A (проигрыш игрока B) определяется числом v. Оно называется ценой игры.

Определение 5. *Если a = b = v, то такая игра называется игрой с седловой точкой, элемент матрицы* $a_{i_{опт}\, j_{опт}} = v$, *соответствующий паре оптимальных стратегий* ($A_{i\ опт}$, $B_{j\ опт}$), *называется седловой точкой матрицы. Этот элемент является ценой игры.*

Седловой точке соответствуют оптимальные стратегии игроков. Их совокупность – решение игры, которое обладает свойством: если один из игроков придерживается оптимальной стратегии, то второму отклонение от своей оптимальной стратегии не может быть выгодным.

Определение 6. *Если игра имеет седловую точку, то говорят, что она решается в чистых стратегиях.*

Найдем решение игры рассмотренного выше примера.

$$a = max_i\, \alpha_i = max_i\, min_j\, a_{ij}\ .$$

Как показано выше:

$$min_j\, a_{ij} = -2, -1, 0.$$

Следовательно,

$$a = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij} = max\big((-2, -1, 0)\big) = 0,$$

a =0 – нижняя цена игры.

$$b = \min_j b_j = \min_j \max_i a_{ij} = min(2,1,0) = 0,$$

b = 0 – верхняя цена игры.

Так как *a* = *b* = 0, матрица игры имеет седловую точку.

Оптимальная стратегия первого игрока – A_3, второго – B_3. Из таблицы видно, что отклонение первого игрока от оптимальной стратегии уменьшает его выигрыш, а отклонение второго игрока от B_3 увеличивает его проигрыш.

Наличие седловой точки в игре – это далеко не правило, скорее, исключение. Существует разновидность игр, которые всегда имеют седловую точку и, значит, решаются в чистых стратегиях. Это так называемые игры с полной информацией.

Определение 7. *Игрой с полной информацией называется такая игра, в которой каждый игрок при каждом личном ходе знает всю предысторию ее развития, т.е. результаты всех предыдущих ходов.*

Примерами игр с полной информацией могут служить шашки, шахматы, "крестики-нолики" и т.д.

Теорема. Каждая игра с полной информацией имеет седловую точку и, значит, имеет решение в чистых стратегиях.

В каждой игре с полной информацией существует пара оптимальных стратегий, дающая устойчивый выигрыш, равный цене игры v. Если решение игры известно, сама игра теряет смысл. Например, шахматная игра либо кончается выигрышем белых, либо выигрышем черных, либо ничьей, только чем именно – мы пока не знаем (к счастью для любителей шахмат). Добавим еще: вряд ли будем знать это в обозримом будущем, так как число стратегий так велико, что крайне трудно привести шахматную игру к матричной форме и найти в ней седловую точку.

6.3. Решение матричной игры в смешанных стратегиях

Если платежная матрица не имеет седловой точки, т.е. $a < b$ и $a \leq v \leq b$, то поиск решения игры приводит к применению сложной стратегии, состоящей в случайном применении двух и более стратегий с определенными частотами.

Определение 1. Сложная стратегия, состоящая в случайном применении всех стратегий с определенными частотами, называется *смешанной.*

В игре, матрица которой имеет размерность $m \times n$, стратегии первого игрока задаются наборами вероятностей $\bar{X} = (x_1, x_2, \dots x_m)$, с которыми игрок применяет свои чистые стратегии. Эти наборы можно рассматривать как m-мерные векторы, для координат которых выполняются условия

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \qquad i = \overline{1,m}\,.$$

Аналогично для второго игрока наборы вероятностей определяют n -мерные векторы $\bar{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n,)$, для координат которых выполняются условия

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \quad j = \overline{1,n}\,.$$

Выигрыш первого игрока при использовании смешанных стратегий определяют как математическое ожидание выигрыша, т.е. он равен:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j\,.$$

Теорема Неймана. Основная теорема теории игр. Каждая конечная игра имеет по крайней мере одно решение, возможно, в области смешанных стратегий. Применение оптимальной стратегии позволяет получить выигрыш, равный цене игры: a<v <b. Применение первым игроком оптимальной стратегии $\bar{X}_{опт}$ должно обеспечить ему при любых действиях второго игрока выигрыш не меньше цены игры. Поэтому выполняется соотношение

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_{iопт} \geq v, \quad j = \overline{1,n}\,. \tag{6.3}$$

Аналогично для второго игрока оптимальная стратегия $\bar{Y}_{опт}$ должна обеспечить при любых стратегиях первого игрока проигрыш, не превышающий цену игры, т.е. справедливо соотношение

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_{jопт} \leq v, \quad i = \overline{1,m}\,. \tag{6.4}$$

Если платежная матрица не содержит седловой точки, то задача определения смешанной стратегии тем сложнее, чем больше размерность матрицы. Поэтому матрицы большой размерности целесообразно упростить, уменьшив их размерность путем вычеркивания дублирующих (одинаковых) и не доминирующих стратегий.

Определение 2. *Дублирующими* называются стратегии, у которых соответствующие элементы платежной матрицы одинаковы.

Определение 3. Если все элементы i-й строки платежной матрицы больше соответствующих элементов k-й строки, то i-я стратегия игрока ***A*** называется *доминирующей над k-й стратегией.* Если все элементы j-го столбца платежной матрицы меньше соответствующих элементов k-го столбца, то j-я стратегия игрока ***B*** называется *доминирующей над k-й стратегией.*

Пример. Рассмотрим игру, представленную платежной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 6 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Для игрока ***A*** имеем: гарантированный выигрыш этого игрока или нижняя цена игры:

$$a = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij} = max(2,2,3,2) = 3\,.$$

Для игрока ***B*** имеем: гарантированный проигрыш этого игрока, или верхняя цена игры.

$$b = \min_j b_j = \min_j \max_i a_{ij} = min(7,6,6,4,5) = 4\,.$$

Однако исходную матрицу можно упростить. Мы видим, что все элементы стратегии A_2 меньше элементов стратегии A_3, т.е. A_2 заведомо невыгодна для первого игрока и ее можно исключить. Далее все элементы A_4 меньше A_3, поэтому исключаем и A_4. В итоге получим:

$$A = \begin{pmatrix} 7\,6\,5\,4\,2 \\ 5\,6\,6\,3\,5 \end{pmatrix}.$$

Для второго игрока: сравнивая B_1 и B_4, исключаем B_1 (поскольку для второго игрока это матрица проигрышей и ему выгодно убрать больший проигрыш); сравнивая B_2 и B_4, исключаем B_2; сравнивая B_3 и B_4, исключаем B_3. В результате преобразований получим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Для этой матрицы:

$$a = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij} = max(2,3) = 3\,,$$

$$b = \min_j b_j = \min_j \max_i a_{ij} = min(4,5) = 4\,.$$

Действительно, получили тот же самый результат.

Отсюда: $a < b$, и $3 \le v \le 4$.

6.4. Решение игр графическим методом

Графический метод применим к играм, в которых хотя бы один игрок имеет ***только две*** стратегии.

Первый случай. Рассмотрим игру (2×2) с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

без седловой точки. Решением игры являются смешанные стратегии игроков $\bar{X} = (x_1, x_2)$ и $\bar{Y} = (y_1, y_2)$, где x_1 – вероятность применения первым игроком первой стратегии, x_2 – вероятность применения первым игроком второй стратегии, y_1 – вероятность применения вторым игроком первой стратегии, y_2 – вероятность применения вторым игроком второй стратегии. Очевидно, что

$$x_1 + x_2 = 1, \qquad y_1 + y_2 = 1.$$

Найдем решение игры графическим методом, как показано на рис. 6.1.

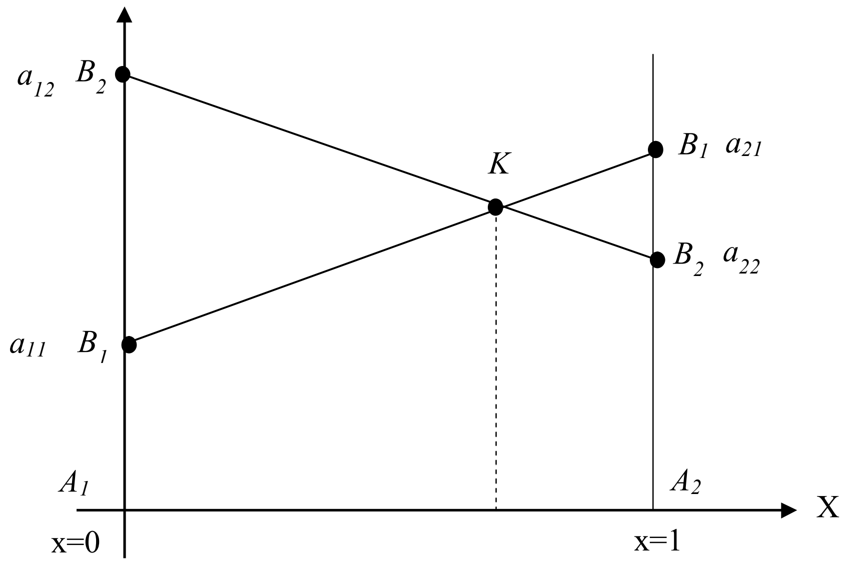


Рис. 6.1. Графический метод решения. Этап 1

На оси OX отложим отрезок, длина которого равна единице. Левый конец ($x = 0$) соответствует стратегии первого игрока A_1, правый ($x = 1$) – стратегии A_2. Внутренние точки отрезка будут соответствовать смешанным стратегиям $\bar{X} = (x_1, x_2)$ первого игрока, где $x_1 = 1 - x_2$. Через концы отрезка проведем прямые, перпендикулярные оси OX, на которых будем откладывать выигрыш при соответствующих чистых стратегиях. Если игрок ***B*** применяет стратегию B_1 , то выигрыш при использовании первым игроком стратегий A_1 и A_2 составит соответственно a_{11} и a_{21} . Отложим эти точки на прямых и соединим их отрезком B_1B_1.

Если игрок А применяет смешанную стратегию, то выигрышу соответствует некоторая точка K, лежащая на этом отрезке (рис. 6.2).

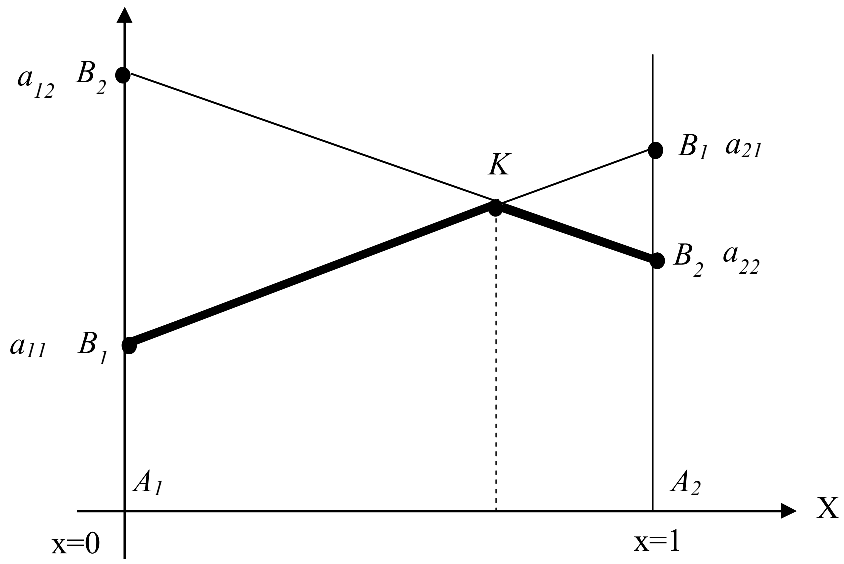


Рис. 6.2. Графический метод. Этап 2

Аналогично строится отрезок B_2B_2 , соответствующий стратегии B_2 игрока ***B***.

Определение 1. Ломаная линия, составленная из частей отрезков, интерпретирующих стратегии игрока В, расположенная ниже всех отрезков, называется *нижней границей выигрыша*, получаемого игроком ***A***.

Определение 2. Стратегии, части которых образуют нижнюю границу выигрыша, называются *активными стратегиями.*

В игре (2 × 2) обе стратегии являются активными.

Ломаная B_1KB_2 является нижней границей выигрыша, получаемого игроком ***A*** (см. рис. 6.2). Точка K, в которой он максимален, определяет цену игры и ее решение. Найдем оптимальную стратегию первого игрока.

Согласно теореме Неймана:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_{ionm} \geq v, \quad j = \overline{1,n}\,.$$

Из этого соотношения запишем систему уравнений. Правые части равны, следовательно, равны и левые части:

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = a_{12}x_1 + a_{22}x_2.$$

Получили одно уравнение с двумя неизвестными. Поэтому необходимо добавить второе уравнение из условия, что полная вероятность равна единице, т.е.: $x_1 + x_2 = 1$.

Получили систему двух уравнений с двумя неизвестными, которая имеет единственное и однозначное решение:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = a_{12}x_1 + a_{22}x_2\,, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

Решаем её. Исключаем x_2:

$$a_{11}x_1 + a_{21}(1 - x_1) = a_{12}x_1 + a_{22}(1 - x_1)\,.$$

Раскроем скобки:

$$a_{11}x_1 + a_{21} - a_{21}x_1 = a_{12}x_1 + a_{22} - a_{22}x_1\,.$$

Приведём подобные члены:

$$a_{11}x_1 - a_{12}x_1 + a_{22}x_1 - a_{21}x_1 = a_{22} - a_{21}\,.$$

Отсюда найдём x_1:

$$x_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}\,. \tag{6.5}$$

Аналогично, исключая x_1, найдём x_2:

$$x_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}\,. \tag{6.6}$$

Зная x_1 *и* x_2, найдём v, исходя из, например, $a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = v$:

$$v = a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = a_{11} \cdot \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} +$$

$$+ a_{21} \cdot \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}\,.$$

$$v = \frac{a_{11} \cdot (a_{22} - a_{21}) + a_{21} \cdot (a_{11} - a_{12})}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}\,,$$

$$v = \frac{a_{11} \cdot a_{22} - a_{11} \cdot a_{21} + a_{21} \cdot a_{11} - a_{21} \cdot a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}\,,$$

$$v = \frac{a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \qquad (6.7)$$

Найдём теперь y, используя вторую часть теоремы Неймана (6.4).

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_{j опт} \le v, \quad i = \overline{1, m}.$$

Составим аналогичную предыдущему систему:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = v \quad (i = 1), \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 = v \quad (i = 2). \end{cases}$$

Учитывая условие $y_1 + y_2 = 1$, найдём оптимальную стратегию игрока ***B***. Так как равны правые части системы, то равны и левые:

$$a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2.$$

Исключаем y_1:

$$a_{11} \cdot (1 - y_2) + a_{12}y_2 = a_{21} \cdot (1 - y_2) + a_{22}y_2.$$

Раскрываем скобки:

$$a_{11} - a_{11} \cdot y_2 + a_{12}y_2 = a_{21} - a_{21} \cdot y_2 + a_{22}y_2.$$

Группируем подобные члены:

$$-a_{11} \cdot y_2 + a_{12}y_2 + a_{21} \cdot y_2 - a_{22}y_2 = a_{21} - a_{11}.$$

Меняем знак:

$$a_{11} \cdot y_2 - a_{12}y_2 - a_{21} \cdot y_2 + a_{22}y_2 = a_{11} - a_{21}.$$

Получим:

$$y_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \qquad (6.8)$$

Теперь найдём y_1.

$$y_1 = 1 - y_2 = 1 - \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}},$$

$$y_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \qquad (6.9)$$

Раньше мы уже нашли цену игры v (6.7). Посмотрим, будет ли она такой же и для этой системы уравнений. Имеем:

$$v = a_{11}y_1 + a_{12}y_2.$$

Отсюда

$$v = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = a_{11} \cdot \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} +$$

$$+ a_{12} \cdot \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}},$$

$$v = \frac{a_{11} \cdot (a_{22} - a_{12}) + a_{12} \cdot (a_{11} - a_{21})}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} =$$

$$= \frac{a_{11} \cdot a_{22} - a_{11} \cdot a_{12} + a_{12} \cdot a_{11} - a_{12} \cdot a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}},$$

$$v = \frac{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}.$$

Получили одинаковые для v ответы, что естественно.

Пример 1. Найти решение игры, заданной числовой матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для этой матрицы:

$$a = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij} = max(1,1) = 1\,,$$

$$b = \min_j b_j = \min_j \max_i a_{ij} = min(3,2) = 2\,,$$

$$1 \leq v \leq 2\,.$$

Игра не имеет седловой точки, так как $a \neq b$. Оптимальное решение следует искать в области смешанных стратегий. Построим на плоскости отрезки, соответствующие стратегиям второго игрока (рис. 6.3).

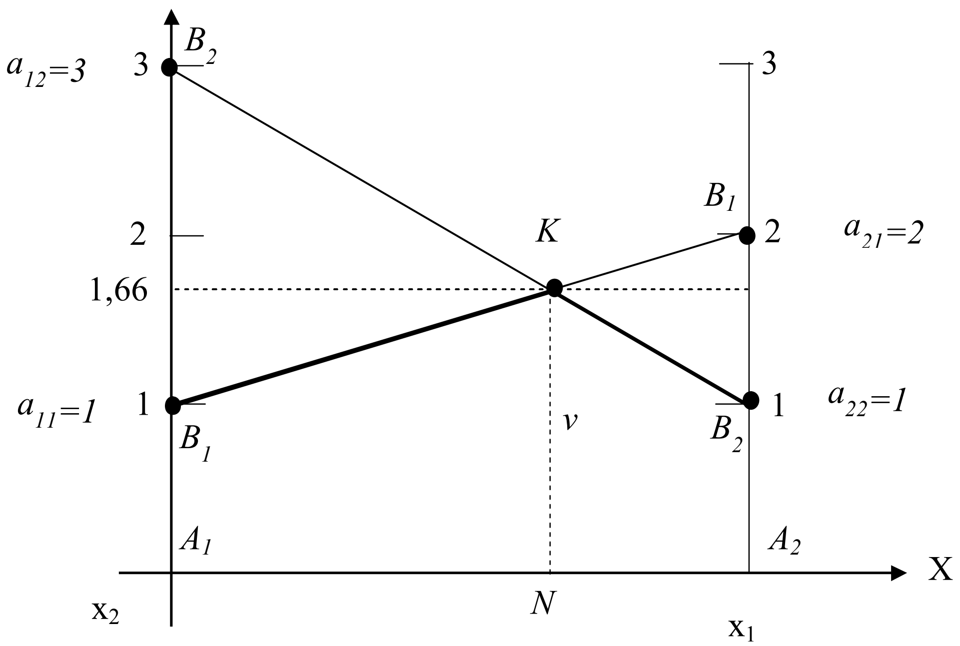


Рис. 6.3. Графический метод. Этап 3

Находим оптимальные стратегии и цену игры:

$$x_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{1-2}{1+1-3-2} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3},$$

$$x_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{1-3}{1+1-3-2} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3},$$

$$y_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{1-3}{1+1-3-2} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3},$$

$$y_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \frac{1-2}{1+1-3-2} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3},$$

$$v = \frac{a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{1 \cdot 1 - 2 \cdot 3}{1+1-3-2} = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3},$$

$x_1 = 1/3$, $x_2 = 2/3$; $y_1 = 2/3$, $y_2 = 1/3$; $v = 5/3 = 1{,}66$.

Ответ. Оптимальные смешанные стратегии игроков $\bar{X} = (1/3, 2/3)$, $\bar{Y} = (2/3, 1/3)$, цена игры составляет $v = 5/3$.

Данный ответ означает следующее:

Если первый игрок с вероятностью 1/3 будет применять первую стратегию и с вероятностью 2/3 вторую, то при достаточно большом количестве игр с данной матрицей его выигрыш в среднем составит не менее 5/3.

Если второй игрок с вероятностью 2/3 будет применять первую стратегию и с вероятностью 1/3 вторую, то при достаточно большом количестве игр с данной матрицей его проигрыш в среднем составит не более 5/3.

Второй случай. Рассмотрим игру с матрицей $(2 \times n)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} \end{pmatrix}.$$

Для каждой из n стратегий игрока ***B*** строится соответствующий ей отрезок на плоскости. Находится нижняя граница выигрыша, получаемого игроком ***A***, и определяется точка на нижней границе, соответствующая наибольшему выигрышу. Выделяются две активные стратегии игрока ***B***, отрезки которых проходят через данную точку. Далее рассматриваются только эти две стратегии игрока ***B***. Игра сводится к игре с матрицей (2×2).

Пример 2. Найти решение игры, заданной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2\,3\,1\,4 \\ 4\,2\,3\,1 \end{pmatrix}.$$

Находим верхнюю и нижнюю цену игры.

Согласно (1) – $a = max_i\, \alpha_i = max_i\, min_j\, a_{ij}$. Следовательно,

$$a = max\,(1,1) = 1.$$

Согласно (2) – $b = min_j\, b_j = min_j\, max_i\, a_{ij}$. Следовательно,

$$b = min\,(4, 3, 3, 4) = 3.$$

То есть $a < b$, $1 < v < 3$.

Игра не имеет седловой точки. Оптимальное решение следует искать в области смешанных стратегий. Построим на плоскости отрезки, соответствующие стратегиям второго игрока: B_1=(*2, 4*), B_2=(*3, 2*), B_3=(*1, 3*), B_4=(*4, 1*) (рис. 6.4).

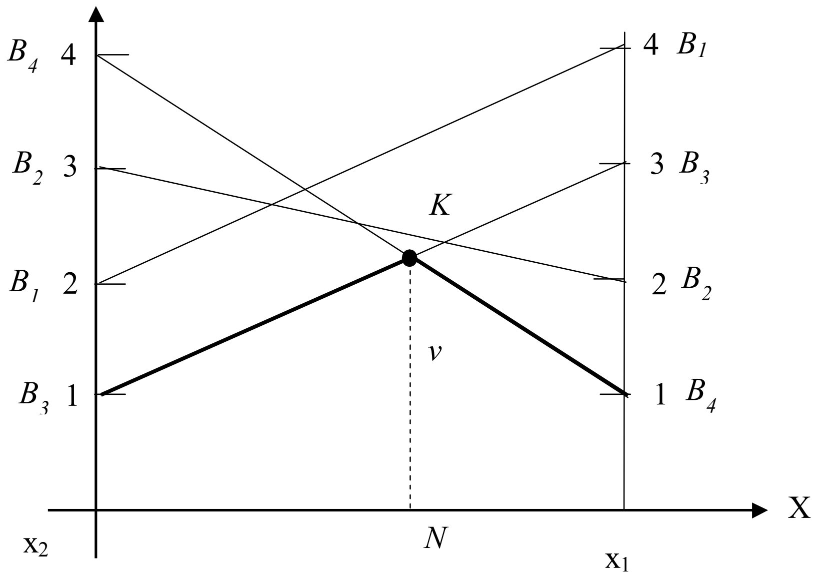


Рис. 6.4. Графический метод. Этап 4

Нижней границей выигрыша для игрока ***A*** является ломаная B_3KB_4 . Стратегии B_3 и B_4 являются активными стратегиями игрока ***B***. Точка их пересечения ***K*** определяет оптимальные стратегии игроков и цену игры. Второму игроку невыгодно применять стратегии B_1 и B_2, поэтому вероятность их применения равна нулю, т.е. $y_1 = y_2 = 0$. Решение игры сводится к решению игры с матрицей (2×2), т. е. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Соответственно этой матрице найдём:

$a = max\,(1, 1) = 1$, $b = min\,(3, 4) = 3$, $a < b$, $1 < v < 3$.

По формулам (6.5) – (6.9) находим оптимальные стратегии и цену игры:

$$x_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{1 - 3}{1 + 1 - 4 - 3} = \frac{-2}{-5} = \frac{2}{5},$$

$$x_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{1 - 4}{1 + 1 - 4 - 3} = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5},$$

$$y_1 = y_3 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{1 - 4}{1 + 1 - 4 - 3} = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5},$$

$$y_2 = y_4 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{1 - 3}{1 + 1 - 4 - 3} = \frac{-2}{-5} = \frac{2}{5},$$

$$v = \frac{a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{1 \cdot 1 - 3 \cdot 4}{1 + 1 - 4 - 3} = \frac{-11}{-5} = \frac{11}{5},$$

$x_1 = 2/5$; $x_2 = 3/5$; $y_3 = 3/5$; $y_4 = 2/5$; $v = 11/5$.

Ответ. Оптимальные смешанные стратегии игроков $\bar{X} = (2/5, 3/5)$ и $\bar{Y} = (0, 0, 3/5, 2/5)$, цена игры составляет $v = 11/5$.

Данный ответ означает следующее:

1. Если первый игрок с вероятностью 2/5 будет применять первую стратегию и с вероятностью 3/5 вторую, то при достаточно большом количестве игр с данной матрицей его выигрыш в среднем составит не менее 11/5.

2. Если второй игрок с вероятностью 3/5 будет применять третью стратегию, с вероятностью 2/5 четвертую и не будет использовать первую и вторую стратегии, то при достаточно большом количестве игр с данной матрицей его проигрыш в среднем составит не более 11/5.

Третий случай. Рассмотрим игру с матрицей $(m \times 2)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} \end{pmatrix}.$$

Решение игры может быть получено аналогично случаю два. Для каждой из m стратегий игрока ***A*** строится соответствующий ей отрезок на плоскости.

Находится верхняя граница проигрыша, получаемого игроком ***B***, и определяется точка на нижней границе, соответствующая наименьшему проигрышу. Выделяются две активные стратегии игрока ***A***, отрезки которых проходят через данную точку.

Далее рассматриваются только эти две стратегии игрока ***A.*** Игра сводится к игре с матрицей (2×2) .

Пример 3. Найти решение игры, заданной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \\ 0 & 5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Согласно (6.1):

$$a = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij} = max(3, 2, 0, -1) = 3\ .$$

Согласно (6.2):

$$b = \min_j b_j = \min_j \max_i a_{ij} = \ min(4, 6) = 4\ .$$

Следовательно, a < b; 3 < v < 4.

Игра не имеет седловой точки. Оптимальное решение следует искать в области смешанных стратегий. Построим на плоскости отрезки, соответствующие стратегиям первого игрока (рис. 6.5).

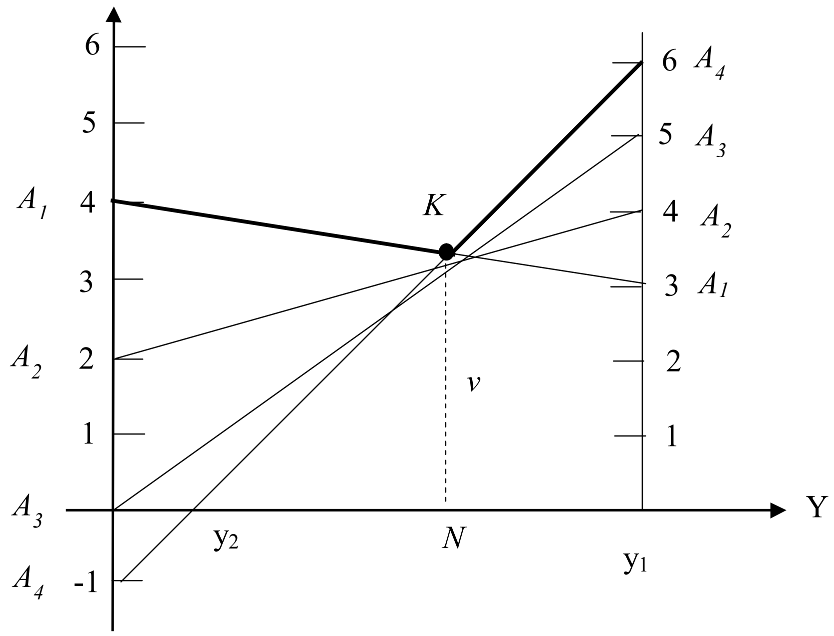


Рис. 6.5. Графический метод. Этап 5

Верхней границей проигрыша для игрока ***B*** является ломаная A_1KA_4 . Стратегии A_1 и A_4 являются активными стратегиями игрока ***A***. Точка их пересечения ***K*** определяет оптимальные стратегии игроков и цену игры. Первому игроку невыгодно применять стратегии A_2 и A_3, поэтому вероятность их применения равна нулю, т.е. $x_2 = x_3 = 0$. Решение игры сводится к решению игры с матрицей (2×2).

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Соответственно этой матрице найдём:

$a = max\,(3, -1) = 3$, $b = min\,(4, 6) = 4$, $a < b$, $3 < v < 4$.

Затем находим оптимальные стратегии и цену игры.

$$x_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{6+1}{4+6-3+1} = \frac{7}{8},$$

$$x_2 = x_4 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{4-3}{4+6-3+1} = \frac{1}{8},$$

$$y_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{6-3}{4+6-3+1} = \frac{3}{8},$$

$$y_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{4+1}{4+6-3+1} = \frac{5}{8},$$

$$v = \frac{a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{4 \cdot 6 + 1 \cdot 3}{4+6-3+1} = \frac{27}{8} = 3{,}375\,,$$

$$x_1 = 7/8;\ x_4 = 1/8;\ y_1 = 3/8,\ y_2 = 5/8;\ v = 27/8.$$

Ответ. Оптимальные смешанные стратегии игроков $\bar{X} = (7/8, 0, 0, 1/8)$ и $\bar{Y} = (3/8, 5/8)$, цена игры составляет v =27/8.

Данный ответ означает следующее:

Если первый игрок с вероятностью 7/8 будет применять первую стратегию, с вероятностью 1/8 четвертую и не будет использовать вторую и третью стратегии, то при достаточно большом количестве игр с данной матрицей его выигрыш в среднем составит не менее 27/8.

Если второй игрок с вероятностью 3/8 будет применять первую стратегию и с вероятностью 5/8 вторую, то при достаточно большом количестве игр с данной матрицей его проигрыш в среднем составит не более 27/8.

6.5. Сведение матричной игры к задаче линейного программирования

Теория игр находится в тесной связи с линейным программированием, так как каждая конечная игра двух лиц с нулевой суммой может быть представлена как задача линейного программирования и решена симплексным методом и, наоборот, каждая задача линейного программирования может быть представлена как конечная игра двух лиц с нулевой суммой. Рассмотрим игру двух лиц с нулевой суммой, заданную платежной матрицей.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Если платежная матрица не имеет седловой точки, т.е. $a < b$ и $\alpha \leq v \leq \beta$, то решение игры представлено в смешанных стратегиях $\bar{X} = (x_1, x_2, \dots x_m)$ и $\bar{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_n,)$. Применение первым игроком оптимальной стратегии $\bar{X}_{i\text{опт}}$ должно обеспечить ему при любых действиях второго игрока выигрыш не меньше цены игры.

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_{ionm} \geq v, \quad j = \overline{1, n} \,. \tag{6.10}$$

Первая строчка этого условия имеет вид:

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m \geq v, \quad j = 1 \,.$$

Вторая строчка имеет вид:

$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m \geq v, \quad j = 2 \,.$$

И аналогично для всех остальных строк.

Поэтому условие (6.10) в расширенном виде запишется как:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m \geq v \,, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m \geq v \,, \\ \qquad \qquad \dots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m \geq v \,. \end{cases} \tag{6.10а}$$

Таким образом, мы пришли к задаче отыскания оптимальной стратегии игрока ***A***, для которой имеют место ограничения (6.10а).

Величина v неизвестна, однако можно считать, что цена игры $v > 0$. Последнее условие выполняется всегда, если все элементы платежной матрицы неотрицательны, а этого можно достигнуть, прибавив ко всем элементам матрицы некоторое положительное число.

Преобразуем систему ограничений (6.10а), разделив все члены неравенств на *v*.

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + \ldots + a_{m1}t_m \geq 1\,, \\ a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + \ldots + a_{m2}t_m \geq 1\,, \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + \ldots + a_{mn}t_m \geq 1\,, \end{cases} \tag{6.11}$$

где

$$t_i = \frac{x_i}{v} \geq 0 \qquad i = \overline{1,m}\,. \tag{6.12}$$

По условию – $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1$. Разделим обе части этого равенства на *v*.

$$t_1 + t_2 + \ldots + t_m = \frac{1}{v}\,. \tag{6.13}$$

Оптимальная стратегия $\bar{X}_{i\text{опт}}$ игрока ***A*** должна максимизировать величину *v*, следовательно, функция

$$L(\bar{T}) = \sum_{i=1}^{m} t_i \tag{6.14}$$

должна принимать минимальное значение.

В итоге получена задача линейного программирования: найти минимум целевой функции (6.14) при ограничениях (6.11), причем на переменные наложено условие неотрицательности (6.12). Решая ее, находим значения t_i, $i = \overline{1,m}$ и величину $1/v$, затем отыскиваются значения $x_i = v \cdot t_i$.

Аналогично для второго игрока оптимальная стратегия $\bar{Y}_{i\text{опт}}$ должна обеспечить при любых стратегиях первого игрока проигрыш, не превышающий цену игры.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_{j\text{опт}} \leq v, \quad i = \overline{1,m}\,. \tag{6.15}$$

По той же схеме, как и для игрока А, первая строчка этого соотношения будет иметь вид:

$$a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}\,y_n \leq v, \quad i = 1\,.$$

Вторая строчка:

$$a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \le v, \quad i = 2\,.$$

Аналогично и все другие строчки.

Поэтому условие (6.15) в расширенном виде запишется как

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}\,y_n \le v\,, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \le v\,, \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n \le v\,. \end{cases} \tag{6.15a}$$

Таким образом, мы пришли к задаче отыскания оптимальной стратегии игрока ***B***, для которой имеют место ограничения (6.15а).

Рассмотрим задачу отыскания оптимальной стратегии игрока ***B***, для которой имеют место ограничения (6.15а).

Преобразуем систему ограничений, разделив все члены неравенств на *v*.

$$\begin{cases} a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + \ldots + a_{1n}\,s_n \le 1\,, \\ a_{21}s_1 + a_{22}s_2 + \ldots + a_{2n}s_n \le 1\,, \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}s_1 + a_{m2}s_2 + \ldots + a_{mn}s_n \le 1. \end{cases} \tag{6.16}$$

$$s_j = \frac{y_j}{v} \ge 0 \quad j = \overline{1,n}\,. \tag{6.17}$$

По условию $y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 1$. Разделим обе части этого равенства на *v*.

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_n = \frac{1}{v}\,. \tag{6.18}$$

Оптимальная стратегия $\bar{Y}_{i\text{опт}}$ игрока ***B*** должна минимизировать величину *v*, следовательно, функция

$$Z(\bar{S}) = \sum_{j=1}^{n} s_j \tag{6.19}$$

должна принимать максимальное значение.

Получена задача линейного программирования: найти максимум целевой функции (6.19) при ограничениях (6.16), причем на переменные наложено условие неотрицательности (6.17).

Таким образом, для нахождения решения игры имеем симметричную пару двойственных задач линейного программирования. Можно найти решение одной из них, а решение второй находится с использованием теории двойственности.

Пример. Найти решение игры, заданной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 4\,3\,4\,2 \\ 3\,4\,6\,5 \\ 2\,5\,1\,3 \end{pmatrix}.$$

Имеем:

$a = max(2,3,1) = 3,\ \ b = min(4,4,6,5) = 4\ \ \ a < b\ \ 3 \le v \le 4.$

Игра не имеет седловой точки. Оптимальное решение следует искать в области смешанных стратегий.

Для определения оптимальной стратегии игрока ***A*** имеем следующую задачу линейного программирования:

$$L(\bar{T}) = \sum_{i=1}^{3} t_i = t_1 + t_2 + t_3 \ \ \rightarrow \ \min\ .$$

Напомним, что матрица ограничений (6.11) для первого игрока в общем виде записывается как

$$a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + \ldots + a_{m1}t_m \ge 1\ ,$$
$$a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + \ldots + a_{m2}t_m \ge 1\ ,$$
$$\ldots$$
$$a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + \ldots + a_{mn}t_m \ge 1\ .$$

Следовательно, для этой конкретной задачи она будет выглядеть

$$a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + a_{31}t_3 \ge 1\ ,$$
$$a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + a_{32}t_3 \ge 1\ ,$$
$$a_{13}t_1 + a_{23}t_2 + a_{33}t_3 \ge 1\ ,$$
$$a_{14}t_1 + a_{24}t_2 + a_{34}t_3 \ge 1\ ,$$

поскольку: *i = 1, 2, 3,* *j=1, 2, 3, 4*. Поэтому система ограничений для первого игрока примет вид:

$$\begin{cases} 4t_1 + 3t_2 + 2t_3 \ge 1\ , \\ 3t_1 + 4t_2 + 5t_3 \ge 1\ , \\ 4t_1 + 6t_2 + t_3 \ge 1\ , \\ 2t_1 + 5t_2 + 3t_3 \ge 1\ , \end{cases} \qquad (6.20)$$

$$t_i \ge 0, \quad i = \overline{1,3}\ .$$

Для нахождения оптимальной стратегии игрока ***B*** имеем следующую задачу линейного программирования:

$$Z(\bar{S}) = \sum_{j=1}^{4} s_i = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 \ \ \rightarrow \ \ max.$$

Матрица ограничений (6.16) для второго игрока в общем виде записывается как:

$$a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + \ldots + a_{1n}s_n \le 1\,,$$
$$a_{21}s_1 + a_{22}s_2 + \ldots + a_{2n}s_n \le 1\,,$$
$$\ldots$$
$$a_{m1}s_1 + a_{m2}s_2 + \ldots + a_{mn}s_n \le 1\,.$$

Для данной задачи она запишется как:

$$a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + a_{13}s_3 + a_{14}s_4 \le 1\,,$$
$$a_{21}s_1 + a_{23}s_2 + a_{23}s_3 + a_{24}s_4 \le 1\,,$$
$$a_{31}s_1 + a_{32}s_2 + a_{33}s_3 + a_{34}s_4 \le 1\,.$$

Подставив значения соответствующих коэффициентов нашей конкретной задачи, получим:

$$\begin{cases} 4s_1 + 3s_2 + 4s_3 + 2s_4 \le 1\,, \\ 3s_1 + 4s_2 + 6s_3 + 5s_4 \le 1\,, \\ 2s_1 + 5s_2 + s_3 + 3s_4 \le 1\,, \end{cases} \quad (6.21)$$
$$s_i \ge 0, \quad j = \overline{1,4}.$$

Так как число переменных больше 2, то графическим способом эти задачи линейного программирования решить невозможно. Необходимо воспользоваться симплекс-методом. Но он также очень громоздок, тем более что в последней задаче имеем 7 ограничений, следовательно, необходимо и семь переменных.

Проще всего получить решение в Excel.

Запишем условие задачи линейного программирования для первого игрока в Excel, как показано на рис. 6.6

	A	B	C	D	E	F
1		"товар1"	"товар2"	"товар3"	Расход	Запас
2	"ресурс1"	4	3	2		1
3	"ресурс2"	3	4	5		1
4	"ресурс3"	4	6	1		1
5	Ресурс4"	2	5	3		1
6	"Цена"	1	1	1		
7	"План"	0	0	0		

Рис. 6.6. Постановка задачи в Excel

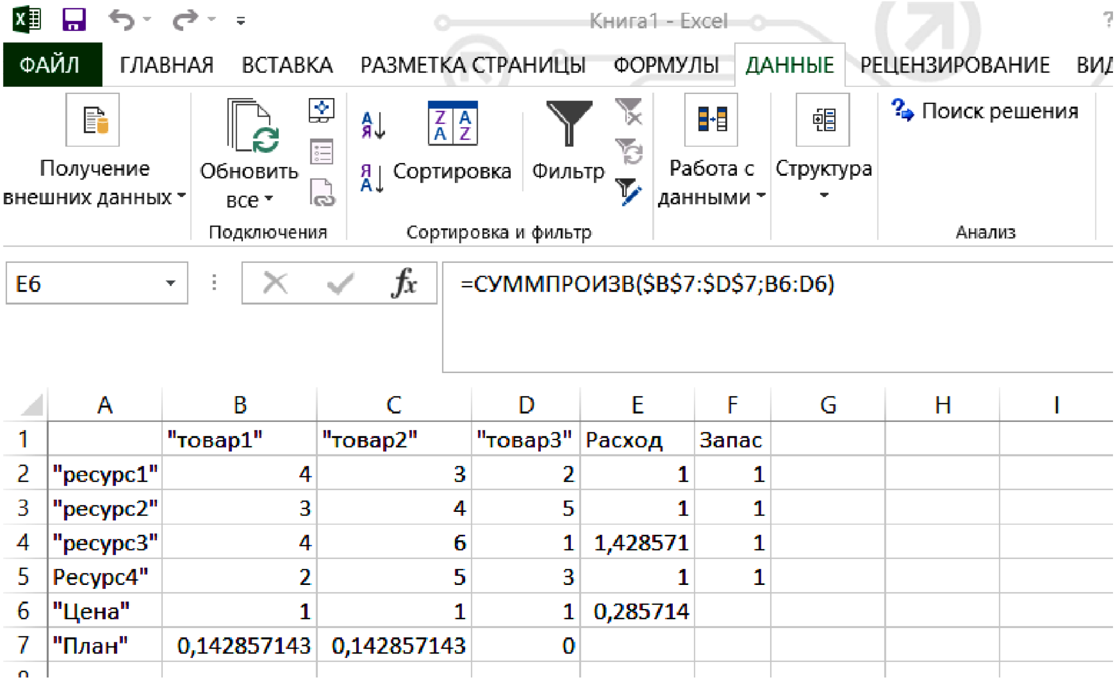
Здесь записано условие нашей задачи: запас всех ресурсов везде одинаков и равен 1, система ограничений взята из (6.20), цены всех «товаров» одинаковы и равны единице.

Значение целевой функции будем записывать в ячейку E6. Выделяем эту ячейку и нажимаем символ функции . В выпадающем меню выбираем категорию – Математические и функцию – СУМПРОИЗВ. Нажимаем ОК и в выпадающем меню записываем перемножаемые массивы.

В данном случае мы перемножаем массив \$B\$7:\$D\$7 (т.е. ячейки от B7 до D7, «План», знак \$ обозначает, что это постоянные ячейки) на массив B6:D6, «Цена», этот массив будет меняться.

Пока курсор стоит на целевой ячейке E6, в строке высвечивается операция, которая будет совершаться в этой ячейке – СУММПРОИЗВ (\$B\$7:\$D\$7; B6:D6). Так как результат этой операции равен нулю (во всех перемножаемых ячейках стоят нули), то и в ячейке E6 высветится 0. Далее мы копируем этот результат и переносим в ячейки E2–E5.

Затем курсор снова ставим в ячейку E6 и на вкладке «Данные» нажимаем кнопку «поиск решения». В выпадающем меню ещё раз указываем ячейку ЦФ – E6, указываем, в какие ячейки необходимо записывать результат (в нашем случае B7 – D7). Указываем соответствующие ограничения (в нашем случае ячейки массива E2:E5 больше соответствующих ячеек массива F2:F5). Также указываем, что мы ищем минимум целевой функции. Дальше нажимаем кнопку «поиск решения» и получаем результат, как показано на рис. 6.7.



	A	B	C	D	E	F
1		"товар1"	"товар2"	"товар3"	Расход	Запас
2	"ресурс1"	4	3	2	1	1
3	"ресурс2"	3	4	5	1	1
4	"ресурс3"	4	6	1	1,428571	1
5	Ресурс4"	2	5	3	1	1
6	"Цена"	1	1	1	0,285714	
7	"План"	0,142857143	0,142857143	0		

Рис. 6.7. Решение задачи в Excel

Мы видим, что оптимальный план и минимальное значение целевой функции соответственно равны:

$$\bar{T}_{\text{опт}} = (0{,}142857;\ 0{,}142857;\ 0), \quad L_{min} = 0{,}285714.$$

Теперь нужно вернуться к исходным переменным. В общем случае имеем.

$$t_i = \frac{x_i}{v} \geq 0; \quad i = 1, 2, 3; \quad t_1 + t_2 + \ t_3 = \frac{1}{v}.$$

Используя результаты решения, запишем:

$$t_1 = 0{,}142857; \ \ t_2 = 0{,}142857; \quad t_3 = 0; \quad t_1 + t_2 = \frac{1}{v}.$$

Таким образом,

$$v = \frac{1}{t_1 + t_2} = \frac{1}{0{,}142857 + 0{,}142857} = \frac{1}{0{,}2857} = 3{,}4999999997 = 3{,}5,$$

$$x_1 = t_1 \cdot v = \frac{t_1}{t_1 + t_2} = \frac{t_1}{2t_1} = 0{,}5; \quad x_2 = t_2 \cdot v = \frac{t_2}{t_1 + t_2} = \frac{t_2}{2t_2} = 0{,}5,$$

$$\bar{X} = (0{,}499995;\ 0{,}499995;\ 0).$$

Следовательно, если игрок А с вероятностью 0,5 будет использовать первую и вторую стратегии и не использовать третью стратегию, то его выигрыш будет не менее 3,5.

Перейдём теперь ко второму игроку.

Матрица его ограничений представлена в (6.21). Следовательно, в Excel условие задачи для второго игрока имеет вид, как показано на рис. 6.8.

	A	B	C	D	E	F	G
1		товар 1	товар 2	товар 3	товар 4	расход	запас
2	ресурс 1	4	3	4	2		1
3	ресурс 2	3	4	6	5		1
4	ресурс 3	2	5	1	3		1
5	Цена	1	1	1	1		
6	План	0	0	0	0		
7							

Рис. 6.8. Постановки задачи для второго игрока

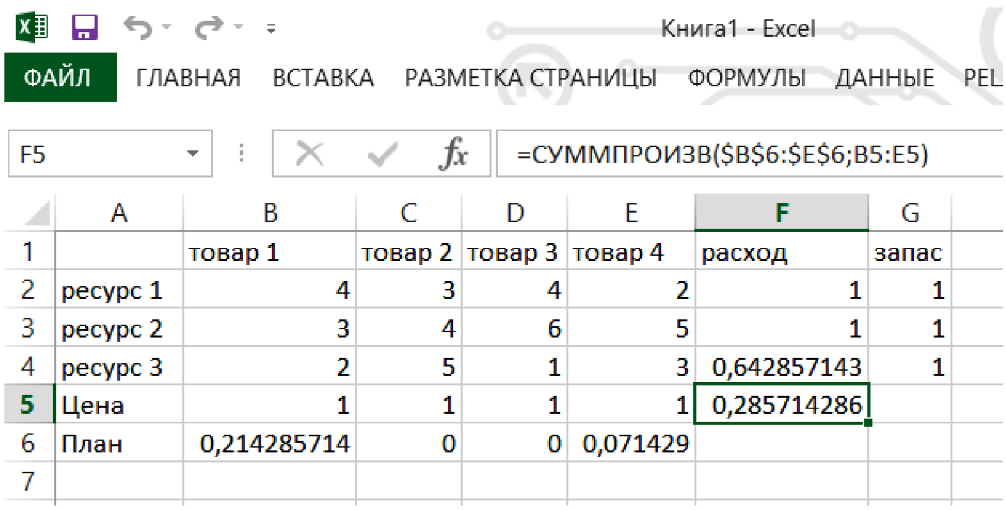
Здесь записано условие нашей задачи: запас всех ресурсов везде одинаков и равен 1, система ограничений, цены всех «товаров» одинаковы и равны единице.

Значение целевой функции будем записывать в ячейку F5. Выделяем эту ячейку и нажимаем символ функции . В выпадающем меню выбираем категорию – Математические и функцию – СУМПРОИЗВ. Нажимаем ОК и в выпадающем меню записываем перемножаемые массивы.

В данном случае мы перемножаем массив $B$6:$E$6 (т.е. ячейки от B6 до E6, знак $ обозначает, что это постоянные ячейки) на массив B5:E5, этот массив будет меняться.

Пока курсор стоит на целевой ячейке F5, в строке высвечивается операция, которая будет совершаться в этой ячейке – СУММПРОИЗВ ($B$6:$E$6; B5:E5). Так как результат этой операции равен нулю (во всех перемножаемых ячейках стоят нули), то и в ячейке F5 высветится 0. Далее мы копируем этот результат и переносим в ячейки F2 – F4.

Затем курсор снова ставим в ячейку F5 и на вкладке «Данные» нажимаем кнопку поиск решения. В выпадающем меню ещё раз указываем ячейку ЦФ – F5, указываем в какие ячейки необходимо записывать результат (в нашем случае B6 – F6). Указываем соответствующие ограничения (в нашем случае ячейки массива F2:F4 меньше соответствующих ячеек массива G2:G4) . Дальше нажимаем кнопку поиск решения и получаем результат, как показано на рис. 6.9.



	A	B	C	D	E	F	G
1		товар 1	товар 2	товар 3	товар 4	расход	запас
2	ресурс 1	4	3	4	2	1	1
3	ресурс 2	3	4	6	5	1	1
4	ресурс 3	2	5	1	3	0,642857143	1
5	Цена	1	1	1	1	0,285714286	
6	План	0,214285714	0	0	0,071429		
7							

Рис. 6.9. Решения для второго игрока

Ясно, что решение выводится в десятичных дробях. Таким образом, мы получили следующий результат.

Оптимальная стратегия второго игрока и цена игры равны:

$$\bar{Z}_{\text{опт}} = (0{,}214285;\ 0;\ 0;\ 0{,}071429), \quad Z_{max} = 0{,}285714.$$

Мы видим, что $L_{min} = Z_{max} = 0{,}285714$.

Перейдём теперь к исходным переменным. В общем случае имеем:

$$s_i = \frac{y_i}{v} \text{ и } s_1 + s_2 + \ldots + s_n = \frac{1}{v}.$$

Следовательно, конкретно для нашей задачи мы запишем:

$$y_1 = 0{,}21..\cdot v, \quad y_2 = 0, \quad 3 = 0, \quad y_4 = 0{,}07\ldots\cdot v$$

и

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = y_1 + y_4 = 1.$$

Из первого условия находим, что

$$\frac{y_1}{y_4} = \frac{0{,}214285}{0{,}071429} = 2{,}99998 \cong 3\ .$$

Таким образом, получаем систему

$$\begin{cases} \dfrac{y_1}{y_4} = 3, \\ y_1 + y_4 = 1. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдём:

$$y_1 = 3/4, \ \ y_4 = 1/4.$$

Далее

$$y_1 = 0{,}21..\cdot v \ \ \rightarrow \ \ v = y_1/0{,}214285 = 3{,}49069 \cong 3{,}5.$$

Мы видим, что цена игры для первого и второго игроков совпадает.

В итоге можно записать оптимальную стратегию игрока ***B*** и цену игры:

$$\bar{Y} = (3/4, 0, 0, 1/4) \qquad v = 3{,}5.$$

Таким образом, если игрок В будет применять первую стратегию с вероятностью 3/4, четвёртую стратегию с вероятностью 1/4 и не применять вторую и третью стратегии, то его проигрыш будет не больше чем 3,5.

6.6. Игры с природой

В рассмотренных выше матричных играх предполагалось, что в них принимают участие два игрока, интересы которых противоположны. Поэтому действия каждого игрока направлены на увеличение выигрыша (уменьшение проигрыша). Однако в некоторых задачах, приводящихся к игровым, имеется неопределенность, вызванная отсутствием информации об условиях, в которых осуществляется действие (погода, покупательский спрос и т.д.). Эти условия зависят не от сознательных действий другого игрока, а от объективной действительности. Такие игры называются играми с природой. Человек в играх с природой старается действовать осмотрительно, второй игрок (природа, покупательский спрос) действует случайно.

Условия игры задаются матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пусть игрок ***A*** имеет стратегии $A_1, A_2, \ldots, A_m$, а природа – состояния $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Наиболее простой является ситуация, когда известна вероятность p_j каждого состояния природы B_j. При этом, если учтены все возможные состояния, то полная вероятность равна единице:

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_i + \ldots + p_n = 1.$$

Если игрок ***A*** выбирает чистую стратегию A_i, то математическое ожидание выигрыша составит

$$p_1 \cdot a_{i1} + p_2 \cdot a_{i2} + \ldots + p_n \cdot a_{in}.$$

Наиболее выгодной будет та стратегия, при которой достигается

$$\max_i (p_1 \cdot a_{i1} + p_2 \cdot a_{i2} + \ldots + p_n \cdot a_{in}).$$

Если информация о состояниях с природой мала, то можно применить принцип недостаточного основания Лапласа, согласно которому можно считать, что все состояния природы равновероятны:

$$\max_i \frac{a_{i1} + a_{i2} + \ldots + a_{in}}{n},$$

т. е. стратегию, для которой среднее арифметическое элементов соответствующей строки максимальное.

Имеется ряд критериев, которые используются при выборе оптимальной стратегии. Рассмотрим некоторые из них.

1. Критерий Вальда. Рекомендуется применять максиминную стратегию. Она выбирается из условия

$$\max_i \left(\min_j a_{ij} \right)$$

и совпадает с нижней ценой игры. Критерий является пессимистическим, считается, что природа будет действовать наихудшим для человека способом.

2. Критерий максимума. Он выбирается из условия

$$\max_i \left(\max_j a_{ij} \right).$$

Критерий является оптимистическим, считается, что природа будет наиболее благоприятна для человека.

3. Критерий Гурвица. Критерий рекомендует стратегию, определяемую по формуле

$$\max_i \left(\alpha \cdot \min_j a_{ij} + (1-\alpha) \cdot \max_j a_{ij} \right),$$

где a – степень оптимизма, изменяется в диапазоне [0, 1].

Критерий придерживается некоторой промежуточной позиции, учитывающей возможность как наихудшего, так и наилучшего поведения природы. При $\alpha = 1$ критерий превращается в критерий Вальда, при $\alpha = 0$ – в критерий максимума. На α оказывает влияние степень ответственности лица, принимающего решение по выбору стратегии. Чем больше последствия ошибочных решений, больше желания застраховаться, тем α ближе к единице.

4. Критерий Сэвиджа. Суть критерия состоит в выборе такой стратегии, чтобы не допустить чрезмерно высоких потерь, к которым она может привести. Находится матрица рисков, элементы которой показывают, какой убыток понесет человек (фирма), если для каждого состояния природы он не выберет наилучшей стратегии.

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn} \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы рисков находятся по формуле

$$r_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij},$$

где $\max_i a_{ij}$ – максимальный элемент в столбце исходной матрицы.

Оптимальная стратегия определяется выражением

$$\min_i \left(\max_j r_{ij} \right).$$

При принятии решений в условиях неопределенности следует оценивать различные варианты с точки зрения нескольких критериев. Если рекомендации совпадают, можно с большей уверенностью выбрать наилучшее решение; если рекомендации противоречат друг другу, окончательное решение надо принимать с учетом его сильных и слабых сторон.

Пример. Возможно строительство четырех типов электростанций: A_1 (тепловых), A_2 (приплотинных), A_3 (бесшлюзовых), A_4 (шлюзовых). Состояния природы обозначим через P_1, P_2, P_3, P_4. Экономическая эффективность строительства отдельных типов электростанций изменяется в зависимости от состояния природы и задана матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 8 & 12 \\ 8 & 5 & 3 & 10 \\ 1 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

1) Согласно критерию Вальда,

$$\max_i \left(\min_j a_{ij} \right) = max(2, 2, 3, 1) = 3.$$

Поэтому следует строить бесшлюзовую электростанцию.

2) Воспользуемся критерием Сэвиджа. Построим матрицу рисков. Согласно определению, элементы матрицы рисков определяются как:

$$r_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij.}$$

Следовательно,

$$r_{11} = \max_i a_{ij} - a_{11} = max(5, 2, 8, 1) - 5 = 8 - 5 = 3,$$

$$r_{12} = max(2, 3, 5, 4) - a_{12} = 5 - 2 = 3,$$

$$r_{13} = max(8,8,3,2) - a_{13} = 8 - 8 = 0,$$
$$r_{14} = max(4,12,10,8) - a_{14} = 12 - 4 = 8,$$
$$r_{21} = max(5,2,8,1) - a_{21} = 8 - 2 = 6,$$
$$r_{22} = max(2,3,5,4) - a_{22} = 5 - 3 = 2,$$
$$r_{23} = max(8,8,3,2) - a_{23} = 8 - 8 = 0(4),$$
$$r_{24} = max(4,12,10,8) - a_{24} = 12 - 12 = 0,$$
$$r_{31} = max(5,2,8,1) - a_{31} = 8 - 8 = 0,$$
$$r_{32} = max(2,3,5,4) - a_{32} = 5 - 5 = 0,$$
$$r_{33} = max(8,8,3,2) - a_{33} = 8 - 3 = 5,$$
$$r_{34} = max(4,12,10,8) - a_{34} = 12 - 10 = 2,$$
$$r_{41} = max(5,2,8,1) - a_{41} = 8 - 1 = 7,$$
$$r_{42} = max(2,3,5,4) - a_{42} = 5 - 4 = 1,$$
$$r_{43} = max(8,8,3,2) - a_{43} = 8 - 2 = 6,$$
$$r_{44} = max(4,12,10,8) - a_{44} = 12 - 8 = 4.$$

Таким образом, матрица рисков будет иметь вид

$$R = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 8 \\ 6 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 7 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Согласно критерию Сэвиджа, определяем

$$\min_i \left(\max_j r_{ij} \right) = min(8,6,5,7) = 5,$$

т. е. в каждой строке выбираем максимальный риск, затем среди этих максимальных рисков выбираем наименьший и смотрим, которой строке (стратегии игрока) он соответствовал.

В нашем случае минимальный из максимальных рисков это 5, который соответствует третьей строке, т.е. третьей стратегии, а именно, тоже бесшлюзовая плотина.

3) Воспользуемся критерием Гурвица.

$$\max_i \left(\alpha \cdot \min_j a_{ij} + (1 - \alpha) \cdot \max_j a_{ij} \right).$$

Положим α = 1/2 = 0,5. В результате найдём:

$$\max_i \left(0{,}5 \cdot \min_j a_{ij} + 0{,}5 \cdot \max_j a_{ij}\right) =$$
$$= 0{,}5 \cdot \max_i \left(\min_j a_{ij} + \max_j a_{ij}\right).$$

Поскольку

$$\min_j a_{ij} = min(2, 2, 3, 1),$$
$$\max_j a_{ij} = max(8, 12, 10, 8),$$
$$0{,}5 \cdot \max_i \left(\min_j a_{ij} + \max_j a_{ij}\right) =$$
$$= 0{,}5 \cdot max\big((2+8), (2+12), (3+10), (1+8)\big) =$$
$$= 0{,}5 \cdot max(10, 14, 13, 9) = 0{,}5 \cdot 14 = 7.$$

Полученная семёрка соответствует второму элементу в критерии, так как номер элемента в критерии — это номер стратегии (ведь мы ищем max_i).

Поэтому по данному критерию необходимо выбрать вторую стратегию, т.е. строить приплотинную электростанцию.

4) Если принять известным распределение вероятностей для различных состояний природы, например считать эти состояния равновероятностными ($p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 1/4$), то для принятия решения следует найти математические ожидания выигрыша:

$$M_1 = 5 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{19}{4},$$
$$M_2 = 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{1}{4} + 12 \cdot \frac{1}{4} = \frac{23}{4},$$
$$M_3 = 8 \cdot \frac{1}{4} + 5 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 10 \cdot \frac{1}{4} = \frac{26}{4},$$
$$M_4 = 1 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{1}{4} = \frac{15}{4}.$$

Так как максимальное значение имеет M_3, то следует строить бесшлюзовую электростанцию.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

Задание 6.1. Игра, называемая «Открывание пальцев», заключается в следующем. Два игрока одновременно из сжатого кулака правой руки открывают по нескольку пальцев. Общее количество открытых пальцев является суммой выигрыша, причем, если общее количество открытых пальцев четно, то выигрывает первый игрок, если же общее количество открытых пальцев нечетно, то выигрывает второй игрок.

Составить платежную матрицу игры.

Задание 6.2. Найти нижнюю и верхнюю цену игры с платёжной матрицей

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 10 & 4 & 3 & 10 \\ -2 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задание 6.3. Найти нижнюю и верхнюю цену игры с платёжной матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Задание 6.4. Пусть игра задана матрицей

$$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & 3 \\ 6 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Найти оптимальные стратегии игроков и определить цену игры.

Задание 6.5. Пусть игра задана матрицей

$$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 9 & 6 \\ 6 & 8 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Найти оптимальные стратегии игроков и определить цену игры.

Задание 6.6. Зная платёжную матрицу

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 & 9 \\ 3 & 4 & 6 & 7 & 6 \\ 7 & 6 & 10 & 8 & 11 \\ 8 & 5 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix},$$

определить верхнюю и нижнюю цены игры и найти решение игры.

Задание 6.7. Найти стратегии игроков A и B и цену игры, заданной матрицей.

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 0 \\ 6 & -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Задание 6.8. Найти решение и цену игры, заданной следующей платёжной матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 12 & 22 \\ 32 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задание 6.9. Выполнить доминирование (упростить) и найти оптимальное решение и цену игры, заданной матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Задание 6.10. Дана матрица игры. Привести игру к задаче линейного программирования. Решить игру в смешанных стратегиях.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 & 5 \\ 6 & 2 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Задание 6.11. Найти оптимальный вариант электростанции по критериям Лапласа, Вальда, Гурвица с показателями 0,8 и 0,3 и Сэвиджа по заданной таблице эффективностей.

Таблица эффективностей

Варианты	Среда			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	10	8	14	11
A_2	9	9	5	10
A_3	8	10	3	14
A_4	7	7	8	12

Задание 6.12. Швейное предприятие реализует свою продукцию через магазин. Сбыт зависит от состояния погоды. В условиях тёплой погоды предприятие реализует $\boldsymbol{a}$ костюмов и $\boldsymbol{b}$ платьев, а при плохой погоде – $\boldsymbol{c}$ костюмов и $\boldsymbol{d}$ платьев. Затраты на изготовление одного костюма равны $\boldsymbol{\alpha_0}$, а платья – $\boldsymbol{\beta_0}$ руб., цена реализации соответ-

ственно равна α_1 руб. и β_1 руб. Определить оптимальную стратегию предприятия.

$a = 1000$, $b = 2300$, $c = 1400$, $d = 700$,

$\alpha_0 = 20$, $\beta_0 = 5$, $\alpha_1 = 40$, $\beta_1 = 12$.

Задание 6.13. Количество возможных стратегий Получателя – 5, Плательщика – 4. Величины платежа образуют таблицу:

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	2	3	5	9
A_2	-2	-4	-2	7
A_3	7	5	0	-3
A_4	-1	6	1	2
A_5	6	9	6	3

Требуется найти наиболее выгодную чистую стратегию первого игрока, выбирающего строку (Получателя).

Задание 6.14. Количество возможных стратегий Получателя – 5, Плательщика – 4. Величины платежа образуют таблицу:

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	2	3	5	9
A_2	-2	-4	-2	7
A_3	7	5	0	-3
A_4	-1	6	1	2
A_5	6	9	6	3

Требуется найти наиболее выгодную чистую стратегию второго игрока, выбирающего столбец (Плательщика).

Задание 6.15. Для платёжной матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$:

– найти и сравнить нижнюю и верхнюю цены игры;

– сделать вывод о существовании игры в чистых стратегиях;

– если игра имеет решение в чистых стратегиях, найти решение игры: стратегии игроков и цену игры.

Задание 6.16. Для данной платёжной матрицы:

– найти и сравнить нижнюю и верхнюю цены игры;

– сделать вывод о существовании решения игры в чистых стратегиях;

– если игра не имеет решения в чистых стратегиях, найти решение игры: стратегии игроков и цену игры.

	B1	B2	B3
A1	6	5	9
A2	-2	-2	7
A3	7	0	-3

Задание 6.17. Для заданной платёжной матрицы требуется выявить стратегии, заведомо невыгодные для Получателя (игрока, выбирающего строку), упростить, если это возможно, платёжную матрицу.

A_1	6	7	7	5
A_2	8	1	6	7
A_3	4	-3	4	3

Задание 6.18. Для заданной платёжной матрицы требуется выявить стратегии, заведомо невыгодные для Плательщика (игрока, выбирающего столбец), упростить, если это возможно, платёжную матрицу.

B_1	B_2	B_3	B_4
6	7	7	5
8	1	6	7
4	-3	4	3

Задание 6.19. Для данной платёжной матрицы требуется найти смешанные стратегии игроков и цену игры.

	B_1	B_2
A_1	0	6
A_2	4	2

В **заданиях 6.20 – 6.49**. Для данных платёжных матриц:

– найти и сравнить нижнюю и верхнюю цену игры;

– найти решение игры: выгодные чистые стратегии игроков и цену игры.

Задание 6.20 $\boxed{\begin{matrix}0 & 2\\ 6 & 5\end{matrix}}$

Задание 6.21 $\boxed{\begin{matrix}1 & 5\\ 0 & 4\end{matrix}}$

Задание 6.22 $\boxed{\begin{matrix}4 & 5\\ 7 & 6\end{matrix}}$

Задание 6.26 $\boxed{\begin{matrix}8 & 4\\ 1 & 2\end{matrix}}$

Задание 6.27 $\boxed{\begin{matrix}3 & 4\\ 6 & 5\end{matrix}}$

Задание 6.28 $\boxed{\begin{matrix}7 & 8\\ 4 & 5\end{matrix}}$

Задание 6.23 $\boxed{\begin{matrix}4 & 5\\ 3 & 7\end{matrix}}$

Задание 6.24 $\boxed{\begin{matrix}6 & 9\\ 3 & 7\end{matrix}}$

Задание 6.25 $\boxed{\begin{matrix}6 & 1\\ 8 & 4\end{matrix}}$

Задание 6.29 $\boxed{\begin{matrix}9 & 3\\ 7 & 1\end{matrix}}$

Задание 6.30 $\boxed{\begin{matrix}3 & 7\\ 2 & 6\end{matrix}}$

Задание 6.31 $\boxed{\begin{matrix}5 & 6\\ 9 & 8\end{matrix}}$

Задание 6.32 $\boxed{\begin{matrix}9 & 7\\ 3 & 4\end{matrix}}$

Задание 6.33 $\boxed{\begin{matrix}7 & 0\\ 4 & 3\end{matrix}}$

Задание 6.34 $\boxed{\begin{matrix}7 & 4\\ 6 & 0\end{matrix}}$

Задание 6.35 $\boxed{\begin{matrix}1 & 4\\ 9 & 7\end{matrix}}$

Задание 6.36 $\boxed{\begin{matrix}4 & 5\\ 0 & 8\end{matrix}}$

Задание 6.37 $\boxed{\begin{matrix}4 & 3\\ 9 & 2\end{matrix}}$

Задание 6.38 $\boxed{\begin{matrix}9 & 6\\ 5 & 2\end{matrix}}$

Задание 6.39 $\boxed{\begin{matrix}7 & 2\\ 8 & 1\end{matrix}}$

Задание 6.40 $\boxed{\begin{matrix}2 & 4\\ 9 & 5\end{matrix}}$

Задание 6.41 $\boxed{\begin{matrix}9 & 1\\ 8 & 6\end{matrix}}$

Задание 6.42 $\boxed{\begin{matrix}9 & 5\\ 7 & 2\end{matrix}}$

Задание 6.43 $\boxed{\begin{matrix}3 & 5\\ 6 & 8\end{matrix}}$

Задание 6.44 $\boxed{\begin{matrix}7 & 6\\ 1 & 0\end{matrix}}$

Задание 6.45 $\boxed{\begin{matrix}5 & 9\\ 2 & 4\end{matrix}}$

Задание 6.46 $\boxed{\begin{matrix}3 & 2\\ 6 & 5\end{matrix}}$

Задание 6.47 $\boxed{\begin{matrix}7 & 1\\ 9 & 8\end{matrix}}$

Задание 6.48 $\boxed{\begin{matrix}5 & 4\\ 6 & 0\end{matrix}}$

Задание 6.49 $\boxed{\begin{matrix}4 & 1\\ 9 & 8\end{matrix}}$

Литература

1. Акор Р. Основы исследования операций / Р. Акор, М. Сашени. – М.: Мир, 1971, – 421 с.

2. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах / И.Л. Акулич. – М.: Высш. шк., 1986.

3. Банди Б. Основы линейного программирования / Б. Банди. – М.: Радио и связь, 1989.

4. Вагнер Р. Основы исследования операций: в 3х т.: пер. с англ. / Р. Вагнер. – М.: Мир, 1973.

5. Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология / Е.С. Вентцель. – М.: Наука, 1980.

6. Венцель Е.С. Элементы теории игр / Е.С. Венцель. – М, 1961.

7. Волков И.К. Исследование операций / И.К. Волков, Е.А. Загоруйко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000.

8. Высшая математика для экономистов / Под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: Банки и биржи: ЮНИТИ, 1997.

9. Горелик В.А. Исследование операций / В.А. Горелик, И.А. Ушаков. – М.: Машиностроение, 1986.

10. Горчаков А.А. Компьютерные экономико-математические модели / А.А. Горчаков, И.В. Орлова. – М.: Компьютер: ЮНИТИ, 1995.

11. Исследование операций / Под ред. М.А. Войтенко и Н.Ш. Кремера. – М.: Экон. образование, 1992.

12. Исследование операций: В 2х т.; пер. с англ. / Под ред. Дж. Маудера, С. Элмаграби. – М.: Мир, 1981, т.1 – 712 с. Т.2 – 677 с.

13. Калашникова Т.В. Исследование операций в экономике / Т.В. Калашникова. – Томск: Изд-во Том. политехн. ун-та, 2011.

14. Надеждин Е.Н. Математические методы и модели в экономике: учеб. пособие / Е.Н. Надеждин, Е.Е. Смирнова, В.С. Варзаков. – Тула: Автономная некоммерческая организация ВПО «Институт экономики и управления», 2011. – 249 с.

15. Петросян Л.А. Теория игр: учеб. пособие для университетов / Л.А. Петросян, Н.А. Зенкевич, Е.А. Семина. – М.: Высш. шк.; Книжный дом «Университет», 1998. – 304с.

16. Тихомиров В.М. Рассказы о максимумах и минимумах / В.М. Тихомиров. – М.: Наука, 1986.

Учебное издание

Малхасян Анастасия Еноковна,
Федосеева Людмила Вениаминовна

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ В ЭКОНОМИКЕ

Редактор А.А. Литвинова
Компьютерная обработка: И.В. Кикичева

В печать 05.04.2018 г.
Формат 60×84/16. Объём 13,6 усл. п.л.
Тираж 100 экз. Заказ № 102. Цена свободная.

Издательский центр ДГТУ
Адрес университета и полиграфического предприятия:
344000, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1